

Technische Mechanik

Vorlesung für den Studiengang
Elektrotechnik und Informationstechnologie

Stephan Kaufmann



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich



2020

Anschrift des Autors

ETH Zürich
Dr. Stephan Kaufmann
Institut für Mechanische Systeme
CLA J 21.1
8092 Zürich
Schweiz

Inhalt

Inhalt	3
Kapitel 1: Grundlagen	4
1.1 Lage und Geschwindigkeit materieller Punkte	5
1.2 Starre Körper	9
1.3 Ebene Bewegungen	12
1.4 Räumliche Bewegungen	16
1.5 Kraft und Moment	23
1.6 Leistung	29
Kapitel 2: Statik	33
2.1 Äquivalenz und Reduktion von Kräftegruppen	33
2.2 Kräftemittelpunkt und Massenmittelpunkt	41
2.3 Prinzip der virtuellen Leistungen	47
2.4 Hauptsatz der Statik	49
2.5 Bindungen	53
2.6 Analytische Statik	59
2.7 Reibung	67
Kapitel 3: Dynamik	76
3.1 Beschleunigung	76
3.2 Trägheitskräfte, Prinzip der virtuellen Leistungen	79
3.3 Newtonsches Bewegungsgesetz	80
3.4 Impulssatz, Massenmittelpunktsatz und Drallsatz	90
3.5 Kinetik ebener Bewegungen	99
3.6 Rückblick	105
Appendix A: Zur Vektorrechnung	107
A.1 Vektoren in der Physik	107
A.2 Addition von Vektoren und Multiplikation mit Skalaren	108
A.3 Basis, Komponenten	110
A.4 Skalarprodukt	112
A.5 Kreuzprodukt	114
A.6 Mehrfache Produkte	117
Appendix B: Zum Energiesatz	118
B.1 Allgemeine Form	118
B.2 Konservative Systeme	120
B.3 Rotation	127
Appendix C: Zum Drallsatz	132
C.1 Massenträgheitsmomente	132
C.2 Satz von Steiner	135
C.3 Rotierende Koordinaten	136
Appendix D: Problemlösung	139
Appendix E: Resultate der Aufgaben	142
Literaturauswahl	155
Sachverzeichnis	156

Kapitel 1: Grundlagen

Die **Mechanik** befasst sich mit der Bewegung und Deformation von Materie unter dem Einfluss von Kräften. Wir betrachten die Ruhe als Spezialfall von Bewegung und erfassen so auch das wichtige Gebiet der **Statik**.

In dieser Lehrveranstaltung werden die elementaren Begriffe und Methoden der Mechanik eingeführt, basierend auf dem Prinzip der virtuellen Leistungen. Wir werden die Grundlagen der Kinematik, Statik und Dynamik von starren Körpern und Systemen verstehen und auf einfache Probleme anwenden können. Damit erarbeiten wir aber auch die Hauptwerkzeuge für komplexere Anwendungen in späteren Vorlesungen (Physik, Robotik, Sensorik, Automatik etc.).

Gleichzeitig lernen wir, in einem allgemeineren Sinn, Methoden zur mathematischen Beschreibung von Naturphänomenen kennen. Viele Konzepte und mathematische Techniken werden in anderen Fächern in ähnlicher Form wieder auftauchen. Jede Auseinandersetzung mit ihnen vertieft das Verständnis.

Unser Ziel ist das Verständnis der Prinzipien, Konzepte und Methoden – nicht das blinde Anwenden von auswendig gelernten Formeln.

Ausblick

Unser Endziel ist es, den Zusammenhang zwischen den an einem System angreifenden Kräften und seinen Bewegungen zu verstehen und zu berechnen. Im Zentrum stehen einzelne starre Körper und Systeme aus verbundenen starren Körpern. Damit lösen wir uns vom Massenpunktmodell der Mittelschule.

Wir steigen ein mit (meist nur gedachten) momentanen Bewegungszuständen von solchen Systemen: Welche Größen braucht man zur Beschreibung, was sind mögliche Bewegungen, wodurch werden Bewegungsmöglichkeiten eingeschränkt? Wir lernen neben den Geschwindigkeiten noch die Rotationsgeschwindigkeiten kennen.

Dann studieren wir Kräfte: Wo greifen sie an, wie kann man sie mathematisch beschreiben, was darf man mit ihnen machen, was nicht? In Analogie zu den Rotationsgeschwindigkeiten brauchen wir auch noch Momente. Wir entdecken interessante Verwandtschaften zwischen Geschwindigkeiten/Rotationsgeschwindigkeiten und Kräften/Momenten.

Um unser Verständnis von Kräften zu vertiefen, beschränken wir uns vorerst auf den Fall der Statik, wo sich nichts bewegt. Das ist schon anspruchsvoll genug und wichtig zur Klärung der Grundkonzepte. Wir entdecken immer wieder die Zusammenhänge zwischen möglichen bzw. verhinderten Bewegungszuständen und Kräften. Und wir lernen das Wichtigste: Vor jeder Rechnung muss man das betrachtete System abgrenzen. Man muss also wissen, wovon man spricht – eigentlich völlig banal, aber doch nicht so einfach!

Um unser Endziel (s.o.) zu erreichen, sind *Änderungen* von Bewegungszuständen entscheidend. Wir müssen uns also von den *momentanen* Bewegungszuständen und den Vorstellungen der Statik lösen und *Beschleunigungen* studieren. Dann können wir unsere Kenntnisse der Kräfte ausschöpfen und die Zusammenhänge zwischen Kräften und Beschleunigungen sowie Momenten und Rotationsgeschwindigkeiten beschreiben, verstehen und anwenden.

Ganz zum Schluss werden wir in Abschnitt 3.6 auf Seite 105 rückblickend sehen, dass die Statik auch direkt als Spezialfall der Dynamik hätte aufgefasst werden können, dass wir aber auf unserem Umweg viel gelernt haben.

1.1 Lage und Geschwindigkeit materieller Punkte

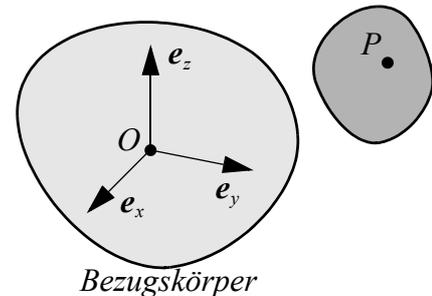
Lernziele

- Sie kennen den Unterschied zwischen einem materiellen und einem geometrischen Punkt.
- Sie können den Freiheitsgrad eines Systems bestimmen.
- Sie können die Geschwindigkeit eines materiellen Punktes in kartesischen und Zylinderkoordinaten berechnen.

Wir beginnen mit einigen grundlegenden Definitionen.

Ein **materieller Punkt** ist ein als *markiert* gedachter Punkt eines **Körpers**. Im Gegensatz dazu stehen z.B. *geometrisch* konstruierte Punkte (Schnittpunkte, Berührungspunkte etc.).

Um die Lage von materiellen Punkten beschreiben zu können, müssen wir uns auf **Bezugskörper** beziehen. Wir idealisieren diese als *starr*. Ein viel verwendeter Bezugskörper ist z.B. die Erde.



Mit dem Bezugskörper verbunden denken wir uns ein **Bezugssystem** $\{O, e_x, e_y, e_z\}$. Die Lage eines materiellen Punktes im Bezugssystem wird durch die **Lagekoordinaten** bestimmt.

Unter dem (globalen) **Freiheitsgrad** eines materiellen Punktes, eines Körpers oder eines aus mehreren Körpern bestehenden Systems verstehen wir die minimale Anzahl Lagekoordinaten, die zur eindeutigen Bestimmung der Lage nötig sind. (Wir werden diesen Begriff auf Seite 19 noch präzisieren.)

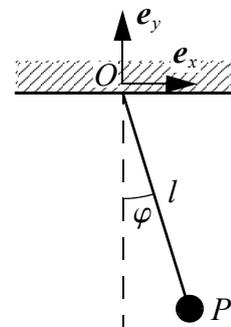
Beispiel: Ebenes Pendel

Eine kleine Kugel wird als materieller Punkt P modelliert. Sie ist an einem Faden der Länge l aufgehängt. Der Faden sei immer straff. Einfachheit halber betrachten wir nur Bewegungen in der Vertikalebene.

Als Lagekoordinaten kommen z.B. in Frage:

- der Winkel φ ,
- die x - y -Koordinaten,
- die x -Koordinate.

Die Lage des Pendels kann mit einer Koordinate beschrieben werden (üblicherweise φ). Der Freiheitsgrad ist also eins.

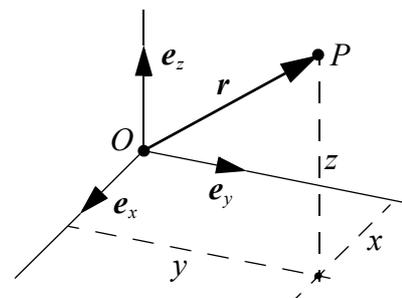


Ein **materieller Punkt im Raum** hat den Freiheitsgrad 3. Die drei Größen können z.B. durch die kartesischen Koordinaten x, y, z oder durch den **Ortsvektor** $r = \mathbf{OP}$ festgelegt werden:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z.$$

Oft sind mehrere Körper zu einem **System** verbunden, und die Eigenschaften der Verbindungen (Gelenk, Faden etc.)

können mathematisch in Form von Gleichungen dargestellt werden. Wenn n die Summe der Freiheitsgrade der einzelnen Körper und b die Anzahl der (linear unabhängigen) Bindungsglei-



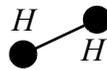
chungen bezeichnet, so ergibt sich folgende Formel für den *Freiheitsgrad eines aus mehreren Körpern zusammengesetzten Systems*:

$$f = n - b. \tag{1.1}$$

Beispiel: Freiheitsgrade von Molekülen

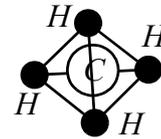
Die Formel (1.1) liefert die rechts aufgeführten Freiheitsgrade für Wasserstoff- und Methan-Moleküle.

Wasserstoff, H₂



$$f = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

Methan, CH₄



$$f = 4 \cdot 3 - 6 = 6$$

(nur H-Atome betrachten)

Einen *starrten Körper* können wir uns aus starr verbundenen Punkten aufgebaut denken (siehe Abschnitt 1.2 für eine genauere Definition). Vom vierten Punkt an (vergleiche mit dem Methan-Molekül) trägt jeder neue Punkt drei neue Freiheitsgrade und drei neue linear unabhängige Gleichungen bei. Es gilt also:

Satz:

Ein starrer Körper hat den Freiheitsgrad 6.

Die **Bewegung** eines materiellen Punktes ist durch eine Vektorfunktion

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \mathbf{r} \end{aligned}$$

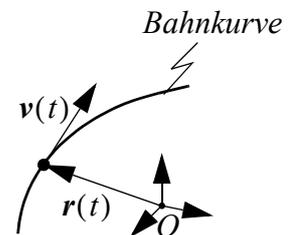
(kurz: $\mathbf{r}(t)$) gegeben, welche die **Bahnkurve** beschreibt.

Damit lässt sich die **Geschwindigkeit** folgendermassen definieren:

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \dot{\mathbf{r}}. \tag{1.2}$$

Zu jedem Zeitpunkt ist die Geschwindigkeit ein zur Bahnkurve tangentialer Vektor.

Der Betrag der Geschwindigkeit, $v = |\mathbf{v}|$, heisst **Schnelligkeit**.



Je nach Wahl der Koordinaten erhält man verschiedene Ausdrücke für die Geschwindigkeit. Am einfachsten ist die Rechnung in *kartesischen Koordinaten*. Wir schreiben

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z. \tag{1.3}$$

Hier sind die Einheitsvektoren konstant

$$\dot{\mathbf{e}}_x = \dot{\mathbf{e}}_y = \dot{\mathbf{e}}_z = \mathbf{0}, \tag{1.4}$$

und wir erhalten deshalb

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z) = \dot{x}\mathbf{e}_x + x\dot{\mathbf{e}}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + y\dot{\mathbf{e}}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z + z\dot{\mathbf{e}}_z = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z. \quad (1.5)$$

Die *Schnelligkeit* ist also

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Beispiel: Rollendes Rad

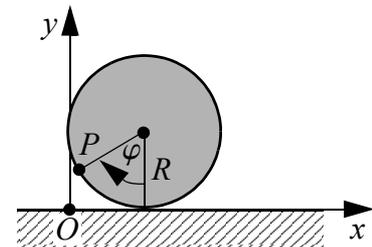
Wir betrachten einen materiellen Punkt P auf der Oberfläche eines rollenden Rades vom Radius R . Die Lage von P wird durch den Winkel φ (im Bogenmass) beschrieben. Für $\varphi = 0$ (siehe Skizze) möge P mit dem Ursprung O des Koordinatensystems zusammenfallen. Aus der Geometrie lesen wir die kartesischen Koordinaten des Punktes P ab ($R\varphi$ ist die abgerollte Länge auf der Radoberfläche und gleichzeitig die x -Koordinate des Radmittelpunktes):

$$x = R(\varphi - \sin\varphi),$$

$$y = R(1 - \cos\varphi).$$

Der Winkel ist eine Funktion der Zeit: $\varphi = \varphi(t)$. Beim Ableiten nach der Zeit müssen wir also die Kettenregel beachten. Es ist z.B.

$$(\sin\varphi(t))' = \frac{d}{dt}\sin(\varphi(t)) = \cos(\varphi(t))\frac{d}{dt}\varphi(t) = \cos(\varphi(t))\dot{\varphi}(t).$$



Wenn wir nun die Zeitabhängigkeit nicht mehr explizit notieren und nur noch φ für $\varphi(t)$ bzw. $\dot{\varphi}$ für $\dot{\varphi}(t)$ schreiben, so ergeben sich die folgende Komponenten der Geschwindigkeit von P :

$$v_x = \dot{x} = R\dot{\varphi}(1 - \cos\varphi),$$

$$v_y = \dot{y} = R\dot{\varphi}\sin\varphi.$$

Die Schnelligkeit ergibt sich aus dem Satz von Pythagoras zu

$$v = |\mathbf{v}| = R|\dot{\varphi}|\sqrt{2 - 2\cos\varphi} = 2R\left|\dot{\varphi}\sin\frac{\varphi}{2}\right|.$$

(Die hier benutzte Relation

$$\sin^2(\varphi/2) = (1 - \cos\varphi)/2$$

ergibt sich aus der Summenformel

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

wenn $\alpha = \beta = \varphi/2$ eingesetzt und $\cos^2(\varphi/2) = 1 - \sin^2(\varphi/2)$ verwendet wird.)

Für viele Probleme sind aber die kartesischen Koordinaten ungeeignet:

Wohl kann z.B. ein kleines Stück der Erdoberfläche als eben idealisiert und mit zwei kartesischen Koordinaten in einfacher Weise beschrieben werden. Vergrößert man aber die betrachtete Fläche, so beginnt die Krümmung der Erde eine Rolle zu spielen. Deshalb müsste eine dritte kartesische Koordinate zugezogen werden. Dies kann durch Wahl eines angepassten Koordinatensystems (z.B. Kugelkoordinaten) vermieden werden.

Ganz allgemein lohnt es sich immer, die Koordinaten sorgfältig und dem Problem angepasst zu wählen. Jede Modellierung eines physikalischen Systems ist eine neue und schwierige Aufgabe, die durch geeignete Koordinatenwahl vereinfacht werden muss. Gewisse Formeln (z.B. für die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen) werden in nicht-kartesischen Koordinaten

zwar komplizierter, für jeden Koordinatentyp müssen sie aber nur ein einziges Mal berechnet werden.

Zylinderkoordinaten ρ, φ, z :

Wir führen (in jedem Punkt) drei Koordinaten-Einheitsvektoren so ein, dass sie tangential zur Kurve liegen, die durch alleinige Veränderung der entsprechenden Koordinate entsteht.

Den Ortsvektor \mathbf{r} des Punktes P können wir schreiben als

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z.$$

Damit ergibt sich aus (1.2) die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot{z} \mathbf{e}_z + z \dot{\mathbf{e}}_z = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot{z} \mathbf{e}_z.$$

Dabei haben wir die Zeitabhängigkeit der Koordinaten ($\rho = \rho(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $z = z(t)$) und der Koordinaten-Einheitsvektoren ($\mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\rho(t)$ etc.) bei einer Bewegung des Punktes P beachtet, aber nicht explizit ausgeschrieben.

Zur Berechnung von $\dot{\mathbf{e}}_\rho$ lesen wir die kartesischen Koordinaten der Einheitsvektoren \mathbf{e}_ρ und \mathbf{e}_φ aus der Zeichnung ab:

$$\mathbf{e}_\rho = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y,$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y.$$

Dank (1.4) können wir die erste Gleichung einfach nach der Zeit ableiten. Nach Anwendung der Summen-, Produkt- und Kettenregel ergibt sich

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\varphi}(-\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y) = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi.$$

Damit erhalten wir die folgende Beziehung für die Geschwindigkeit in Zylinderkoordinaten:

$$\mathbf{v} = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{z} \mathbf{e}_z. \quad (1.6)$$

Die Schnelligkeit kann direkt aus (1.6) ermittelt werden:

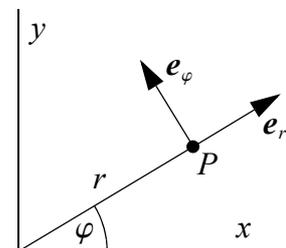
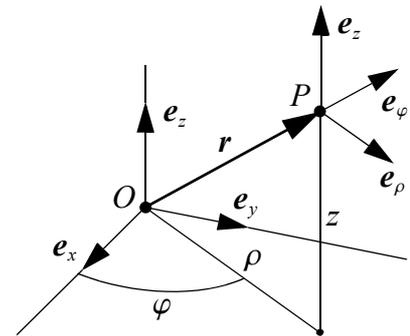
$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}. \quad (1.7)$$

Ebene Polarkoordinaten r, φ :

Die Geschwindigkeit in ebenen Polarkoordinaten kann sofort aus den Zylinderkoordinaten gewonnen werden. Wir müssen dazu nur die z -Koordinate null setzen und ρ durch r ersetzen. Aus Formel (1.6) erhalten wir

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi. \quad (1.8)$$

Die zeitlichen Ableitungen von Winkeln (z.B.: $\dot{\varphi}$) werden als **Winkelgeschwindigkeiten** bezeichnet.

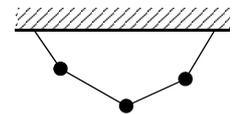


Kontrollfragen

1. Was ist ein Bezugssystem?
2. Was sind Lagekoordinaten?
3. Was ist der Freiheitsgrad f ?
4. Wie gross ist der Freiheitsgrad eines starren Körpers im Raum und wie gross in der Ebene?
5. Wie ist die Geschwindigkeit \mathbf{v} eines materiellen Punktes definiert?
6. Was ist die Schnelligkeit, worin unterscheidet sie sich von der Geschwindigkeit?
7. Welche Komponenten hat die Geschwindigkeit in kartesischen Koordinaten?
8. Beschreiben Sie die Flächenscharen mit konstanten Zylinderkoordinaten ρ , φ bzw. z !
9. Welches sind die Komponenten der Geschwindigkeit in ebenen Polarkoordinaten?

Übungen

1. Finden Sie die zeitliche Ableitung des Einheitsvektors \mathbf{e}_φ in Zylinderkoordinaten!
2. Ein System besteht aus drei materiellen Punkten, die wie skizziert mit Fäden verbunden sind. Die Fäden sind immer gespannt. Das System bewege sich nur in der Zeichenebene. Bestimmen Sie seinen Freiheitsgrad!



Wie gross ist der Freiheitsgrad im Fall eines räumlichen Systems?

3. Ein materieller Punkt bewegt sich auf einer Schraubenlinie. In Zylinderkoordinaten lässt sich seine Bewegung durch die Koordinatenfunktionen

$$\rho(t) = R,$$

$$\varphi(t) = \omega t,$$

$$z(t) = bt.$$

beschreiben (mit konstanten Parametern R , b , ω). Finden Sie die Komponenten der Geschwindigkeit \mathbf{v} in Zylinderkoordinaten und zeigen Sie, dass die Schnelligkeit konstant ist.

4. Susi und Fritz sind dabei, Mechanikaufgaben zu lösen. Sie sollen den Freiheitsgrad f eines starren Körpers im Raum ermitteln. Fritz benutzt 5 Punkte mit 10 Abständen und findet $f = 5 \times 3 - 10 = 5$. Susi benutzt 6 Punkte und kommt auf $f = 6 \times 3 - 15 = 3$. Hans sitzt in der Ecke und strickt. Er sagt: «Nehmt doch nicht so viele Punkte!» Fritz nimmt nun 2 Punkte und findet $f = 2 \times 3 - 1 = 5$. Er ist jetzt überzeugt, die richtige Lösung gefunden zu haben. Susi zweifelt. Erklären Sie!

1.2 Starre Körper

Lernziele

- Sie kennen die mathematische Charakterisierung eines starren Körpers und deren Konsequenz für die Geschwindigkeiten von Punktepaaren, den Satz der projizierten Geschwindigkeiten.
- Sie können den Satz der projizierten Geschwindigkeiten auf konkrete Bewegungen anwenden.
- Sie wissen, dass der starre Körper eine idealisierte Modellbildung ist.
- Sie können Translationen, Rotationen, starre und ebene Bewegungen charakterisieren und Beispiele dafür angeben.
- Sie können sich unter einem momentanen Bewegungszustand etwas vorstellen.

Starre Körper sind nützliche Idealisierungen. Im Gegensatz zu deformierbaren Körpern lässt sich nämlich ihre Position und Bewegung mit wenigen Kenngrößen beschreiben. Es hängt meist von der gewünschten Genauigkeit der Modellierung ab, ob ein Körper als starr betrachtet werden kann.

Ingenieure und Naturwissenschaftler/-innen versuchen in ihrer Arbeit, die wesentlichen physikalischen Eigenschaften eines Systems in einem möglichst einfachen, idealisierten Modell zu erfassen. Dabei muss Genauigkeit gegen Einfachheit abgewogen werden. Dies ist eine schwierige Aufgabe, die grosse Erfahrung voraussetzt.

Ein **starrer Körper** ist dadurch charakterisiert, dass die Distanz zwischen beliebigen Punkten P und Q zeitlich konstant ist:

$$\overline{PQ} = \text{konst.}$$

Diese Gleichung lässt sich vektoriell auch folgendermassen schreiben:

$$(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q)^2 = \text{konst.} \quad (1.9)$$

Durch Ableiten von (1.9) nach der Zeit ergibt sich

$$(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q) \cdot (\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_Q) = 0.$$

Wenn wir einen Einheitsvektor \mathbf{e} von Q in Richtung P einführen,

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q}{|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q|},$$

so erhalten wir

$$\mathbf{e} \cdot (\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_Q) = 0$$

oder

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{v}_P = v_P' = \mathbf{e} \cdot \mathbf{v}_Q = v_Q'.$$

(Diese Rechnung ist im *Beispiel: Projektion, Komponente* auf Seite 112 noch detaillierter erläutert.)

Die *Komponenten* v_P' und v_Q' der Geschwindigkeiten \mathbf{v}_P und \mathbf{v}_Q in Richtung des Einheitsvektors \mathbf{e} sind also gleich. Gleichwertig können wir auch die *Projektionen* \mathbf{v}_P' , \mathbf{v}_Q' auf \mathbf{e} betrachten und festhalten, dass diese beiden *Vektoren* gleich sein müssen:

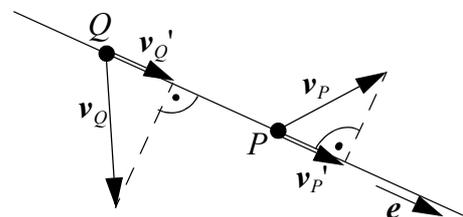
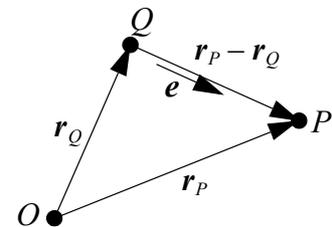
$$\mathbf{v}_P' = \mathbf{v}_Q'.$$

Damit haben wir den folgenden wichtigen Satz bewiesen:

Satz der projizierten Geschwindigkeiten (SdpG)

Die Projektionen \mathbf{v}_P' , \mathbf{v}_Q' der Geschwindigkeiten von zwei beliebigen Punkten P und Q eines *starrten Körpers* auf ihre Verbindungsgerade sind gleich:

$$\mathbf{v}_P' = \mathbf{v}_Q'. \quad (1.10)$$



Beispiel: Geführter Stab

Ein Stab gleitet mit seinen beiden Enden A und B an zwei zueinander senkrechten Flächen. Die Bewegung sei eben.

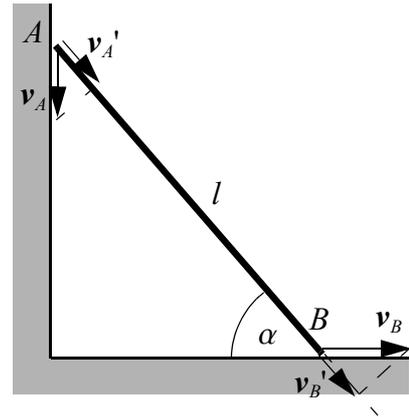
Für die Projektionen der Geschwindigkeiten der Endpunkte in Stabrichtung erhalten wir betragsmässig

$$v_A' = v_A \sin \alpha,$$

$$v_B' = v_B \cos \alpha.$$

Aus dem SdpG (1.10) ergibt sich also folgende Beziehung für die beiden Schnelligkeiten:

$$v_B = v_A \tan \alpha.$$



Oft bewegen sich Körper in einer einfach beschreibbaren Weise. Speziell ausgezeichnet sind die folgenden vier Bewegungsarten:

- **Starre Bewegung:** Der Satz der projizierten Geschwindigkeiten ist zu jedem Zeitpunkt erfüllt.

Der Körper kann starr oder deformierbar sein, wichtig ist nur seine Bewegung.

- **Translation:** Es gilt $v_P = v$ für alle Punkte P .
- **Rotation:** Starre Bewegung, bei der zwei Punkte P und Q in Ruhe bleiben.

Aus dem SdpG folgt, dass damit alle Punkte auf der Verbindungsgeraden, der **Rotationsachse**, in Ruhe bleiben.

P und Q müssen nicht zum Körper gehören; eventuell erweitert man ihn in Gedanken auf den ganzen Raum.

- **Ebene Bewegung:** Sie ist durch folgende zwei Eigenschaften charakterisiert:
 - a) alle Geschwindigkeiten sind zu einer gegebenen Ebene E parallel,
 - b) alle Punkte auf einer Normalen zu E besitzen die gleiche Geschwindigkeit.

Falls die zu einer *ebenen Bewegung* gehörende Ebene E durch x - y -Achsen aufgespannt wird, so lassen sich die beiden Eigenschaften auch folgendermassen formulieren:

- a) $v_z = 0$,
- b) $v_x = v_x(x, y)$ und $v_y = v_y(x, y)$.

Unsere Definition der ebenen Bewegung setzt nicht voraus, dass es sich um eine starre Bewegung handelt. Ansonsten würde die erste Bedingung ausreichen.

Das Studium der Bewegungen von Körpern und Systemen bezeichnet man mit dem griechischstämmigen Begriff **Kinematik**.

Eine Bewegung kann für eine endliche Zeit oder auch nur momentan von einem gewissen Typ sein. In diesem Kapitel interessieren wir uns hauptsächlich für den **momentanen Bewegungszustand**, also die Geschwindigkeiten eines Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt. Wir werden das Wort «momentan» manchmal explizit verwenden («momentane Rotation»), oft aber auch unterdrücken.

Beim Studium der Bewegungszustände kümmern wir uns nicht um die Ausdehnung des vorliegenden Körpers. Wir erweitern ihn in Gedanken auf den ganzen Raum.

Kontrollfragen

1. Was ist ein starrer Körper?
2. Wie lautet der Satz der projizierten Geschwindigkeiten?
3. Was ist eine Translation?
4. Zeigen Sie, dass der Satz der projizierten Geschwindigkeiten bei der Translation erfüllt ist!
5. Was ist eine Rotation?
6. Was ist eine ebene Bewegung?

1.3 Ebene Bewegungen

Lernziele

- Aus zwei Geschwindigkeiten können Sie Art und Bestimmungsgrößen des momentanen ebenen Bewegungszustandes eines starren Körpers ermitteln: Ist es eine Translation oder eine Rotation? Wie gross ist die Translationsgeschwindigkeit bzw. Rotationsgeschwindigkeit; wo liegt das Momentanzentrum?
- Mit diesen Informationen können Sie die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes berechnen.
- Sie können die Bewegungen der Teilkörper eines ebenen Mechanismus bestimmen.
- Sie wissen, wie man die feste und die bewegliche Polbahn bestimmt und können sich deren Abrollen vorstellen.

In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf den wichtigen Spezialfall von *ebenen Bewegungen*. Sie haben die folgende wichtige Eigenschaft, welche ihre Untersuchung motiviert:

Satz:

Eine *starre ebene Bewegung* ist (momentan) entweder eine Translation oder eine Rotation.

Beweis:

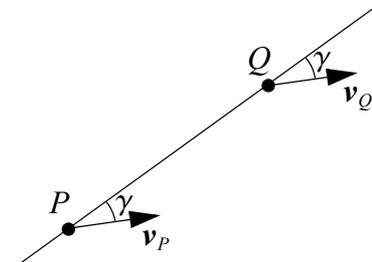
- i) Falls alle Punkte parallele Geschwindigkeit haben, so ist die Bewegung eine Translation, denn aus dem SdpG (1.10) ergibt sich

$$v_P \cos \gamma = v_Q \cos \gamma,$$

und damit gilt

$$v_P = v_Q \text{ für alle } P \text{ und } Q.$$

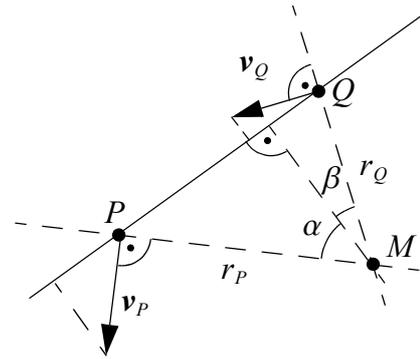
(Falls $\cos \gamma = 0$ ist, so muss ein dritter Punkt betrachtet werden.)



ii) Andernfalls müssen mindestens zwei Punkte nicht parallele Geschwindigkeiten haben. Wir nennen diese Punkte P und Q . Es soll gezeigt werden, dass nun eine Rotation vorliegt. Dazu betrachten wir den Schnittpunkt M der Senkrechten zu den Geschwindigkeiten in P und Q . Aus dem SdpG (1.10) für PM und QM folgt, dass die Projektionen von v_M auf PM und auf QM verschwinden müssen. Weil PM und QM nach Voraussetzung nicht parallel sind, ergibt sich

$$v_M = \mathbf{0}.$$

Die gleiche Überlegung gilt für alle Punkte auf der Normalen zur Bewegungsebene durch M . ■



Aus der obigen Skizze lesen wir für den Fall einer Rotation die Gleichungen

$$v_P \cos \alpha = v_Q \cos \beta,$$

$$r_P \cos \alpha = r_Q \cos \beta$$

ab (SdpG bzw. Höhe im Dreieck PMQ). Daraus folgt

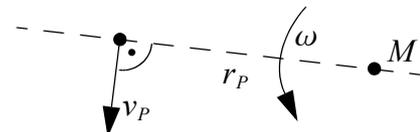
$$v_P \cdot r_P = v_Q \cdot r_Q$$

oder, wenn wir das Verhältnis ω nennen,

$$v_P = \omega r_P, v_Q = \omega r_Q.$$

Die Proportionalitätskonstante ω nennen wir **Rotationsschnelligkeit**. Der ruhende Punkt M heisst **Momentanzentrum**.

Wir können also folgenden Satz formulieren:



Satz vom Momentanzentrum:

Bei der *Rotation* steht die Geschwindigkeit v_P des Punktes P senkrecht auf der Verbindungsgeraden durch P und das Momentanzentrum M . Die Schnelligkeit ist proportional zum Abstand:

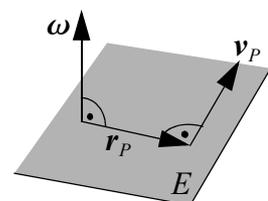
$$v_P = \omega r_P. \tag{1.11}$$

Wenn wir senkrecht zur Ebene den Vektor der **Rotationsgeschwindigkeit**

$$\omega = \omega e_z$$

eingeführen, so können wir die Geschwindigkeit v_P auch folgendermaßen berechnen:

$$v_P = \omega \times r_P. \tag{1.12}$$



Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass diese Formel auch für beliebige Bewegungszustände im Raum gilt.

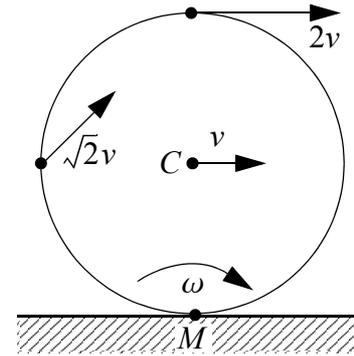
Beispiel: Rollendes Rad

Das Momentanzentrum ist der Auflagepunkt M . In ihm ist nämlich die Geschwindigkeit des Rades null.

Falls z.B. die (horizontale) Mittelpunktgeschwindigkeit den Betrag v hat, so berechnen wir die Rotationsschnelligkeit zu

$$\omega = \frac{v}{R}.$$

Mit dem Satz von Momentanzentrum (1.11) erhalten wir sofort die Richtung und den Betrag der Geschwindigkeit der anderen Punkte.



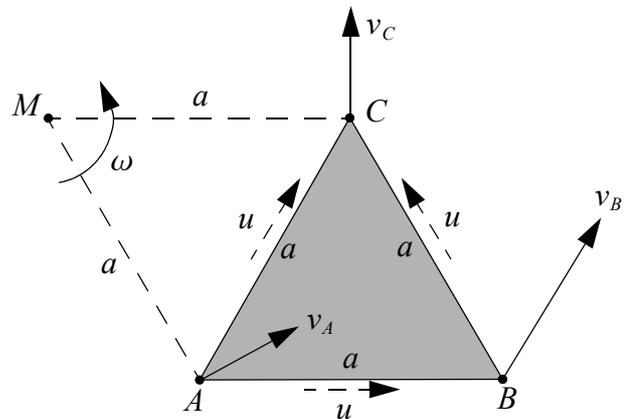
Mit den beiden obigen Sätzen lässt sich ein *ebener Bewegungszustand* also entweder durch den Vektor der Translationsgeschwindigkeit oder durch das Momentanzentrum und die Rotationsschnelligkeit charakterisieren. Die Translation lässt sich auch als Grenzübergang einer Rotation mit unendlich weit entferntem Momentanzentrum auffassen.

Beispiel: Dreieckplatte

Über die Bewegung einer starren gleichseitigen Dreieckplatte ABC (Kantenlänge a) sei bekannt, dass die *Komponenten* der Geschwindigkeiten in den skizzierten Richtungen der Seiten des Dreiecks jeweils u betragen.

Gesucht ist der momentane Bewegungszustand der Platte.

Wir kennen die Komponenten (bzw. Projektionen) der Geschwindigkeiten in den Eckpunkten in jeweils zwei Seitenrichtungen. Damit ergeben sich die skizzierten Geschwindigkeiten mit den Beträgen



$$v_A = v_C = \frac{u}{\cos 30^\circ} = \frac{u}{\sqrt{3}/2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}u,$$

$$v_B = 2u.$$

Das Momentanzentrum M liegt auf den Senkrechten zu den Geschwindigkeiten in A und C . Die Rotationsschnelligkeit ist

$$\omega = \frac{v_A}{a} = 2 \frac{u}{\sqrt{3}a} = \frac{2\sqrt{3}u}{3a}.$$

Bemerkung: Polbahn

Bei ebenen Bewegungen können wir die Lage des Momentanzentrums im Laufe der Bewegung verfolgen. So erhalten wir den geometrischen Ort des Momentanzentrums, der auch als *Polbahn* bezeichnet wird. Die Polbahn hängt vom verwendeten Bezugssystem ab. Wählen wir ein festes System, so heisst sie *festen Polbahn*. Legen wir uns aber ein mit dem sich bewegenden starren Körper verbundenes System zugrunde, so erhalten wir die *bewegliche Polbahn*. Die ebene Bewegung eines starren Körpers kann als das Abrollen der beweglichen auf der festen Polbahn interpretiert werden.

Beispiel: Geführter Stab

Im auf Seite 11 besprochenen Beispiel des geführten Stabes ergibt sich für die momentane Rotationsgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{v_A}{l \cos \alpha} = \frac{v_A}{a}$$

Bezüglich eines mit den ruhenden Flächen verbundenen Systems lesen wir die Beziehung

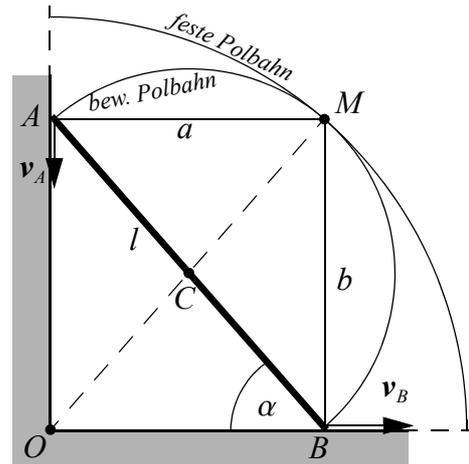
$$\overline{OM} = \overline{AB} = l$$

ab. Die *feste Polbahn* ist also ein Kreis um *O* mit Radius *l*.

In einem mit dem Stab verbundenen System gilt hingegen

$$\overline{CM} = \overline{CA} = \frac{l}{2}$$

Die *bewegliche Polbahn* ist deshalb ein Kreis um *C* mit Radius $\frac{l}{2}$.



Bei *Systemen* aus mehreren *starrten Körpern* möchte man das Momentanzentrum und die Rotationsgeschwindigkeit (oder die Translationsgeschwindigkeit) für jeden einzelnen Körper bestimmen. Damit ist der Bewegungszustand des Systems festgelegt. Dies lässt sich erreichen, indem der Satz der projizierten Geschwindigkeiten und der Satz vom Momentanzentrum auf die einzelnen starrten Körper angewendet wird. In den Gelenken ist die Geschwindigkeit der angrenzenden Körper gleich. In Auflagern, Schiebern etc. ist die Richtung der Geschwindigkeiten festgelegt.

Beispiel: System

Das skizzierte ebene System besteht aus den Stäben *AE*, *BD* der Länge *2l* und den Stäben *DF*, *EF* der Länge *l*. In *A*, *C*, *D*, *E*, *F* befinden sich Gelenke, in *B* ist der Stab *BD* aufgelegt (horizontal verschiebbar). Es sei die Rotationsgeschwindigkeit ω in *A* vorgegeben.

Die Geschwindigkeit des Punktes *F* ist gesucht.

Das Problem kann auf verschiedene Arten gelöst werden. Wir skizzieren eine Möglichkeit:

Die Geschwindigkeiten v_C und v_E ergeben sich sofort aus (1.11). Das Momentanzentrum von *BD* liegt auf den Senkrechten zu den Geschwindigkeiten in *B* und *C*, also in *E*. Die zugehörige Rotationsgeschwindigkeit ist wegen (1.11) ω . Damit erhalten wir v_D .

Um jetzt noch v_F zu bestimmen, wenden wir den SdpG (1.10) auf die Stäbe *DF* und *EF* an:

$$v_F \cdot e_x = v_x = -\omega l,$$

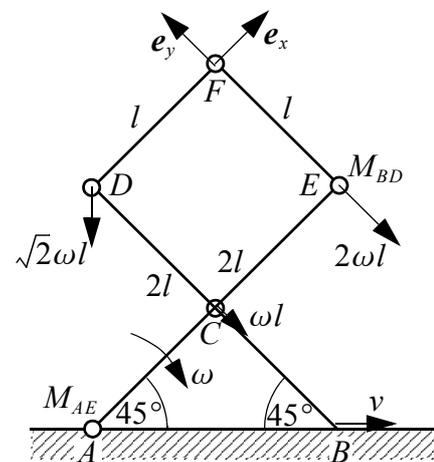
$$v_F \cdot e_y = v_y = -2\omega l.$$

Damit wird also

$$v_F = -\omega l e_x - 2\omega l e_y.$$

Das *Vorgehen* kann also in folgende Schritte strukturiert werden:

1. Identifikation, Markierung (und ev. Nummerierung) der starr bewegten Systemteile.



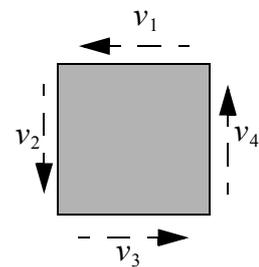
2. Momentanzentrum der Systemteile mit äusseren Lagern bestimmen (Gelenk) oder einschränken (Auflager).
3. Mit dem SvM oder dem SdpG die Geschwindigkeiten der Verbindungen zu weiteren Körpern bestimmen.
4. Mit dem SvM oder dem SdpG die Bewegungszustände der weiteren Körper bestimmen, sich durch das ganze System arbeiten.
5. Falls nötig eine unbekannte Geschwindigkeit annehmen und mittels zweier Projektionen berechnen.

Kontrollfragen

1. Wie lautet der Satz vom Momentanzentrum?
2. Wie ist die Rotationsschnelligkeit definiert?
3. Wann ist eine ebene Bewegung eine Translation, wann eine Rotation?

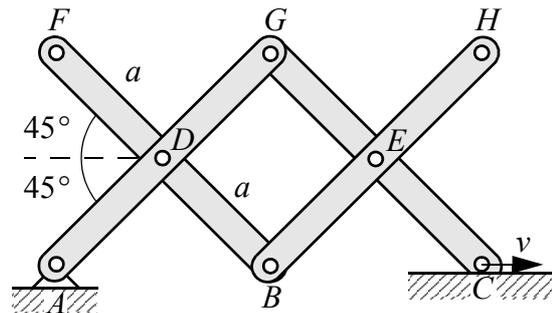
Übungen

1. Der momentane Bewegungszustand einer quadratischen Platte mit Seitenlänge a ist durch die vier Projektionen der Geschwindigkeiten auf die Seiten gegeben. Finde die Geschwindigkeiten der Eckpunkte! Welche Beziehung zwischen v_1 , v_2 , v_3 und v_4 muss bestehen, damit der Satz der projizierten Geschwindigkeiten erfüllt ist? Unter welcher Bedingung ist die Bewegung eine Translation?



2. Vier Stäbe der Länge $2a$ sind gemäss der Skizze mit Gelenken zu einem ebenen Mechanismus verbunden. In A ist der Mechanismus gelenkig gelagert, in C auf gleicher Höhe horizontal aufgelegt. In der momentanen Lage sind die Winkel zwischen allen direkt verbundenen Stäben rechte. Die horizontale Geschwindigkeit des Punktes C hat den Betrag v .

Berechnen Sie die Geschwindigkeiten der beiden Endpunkte F und H !



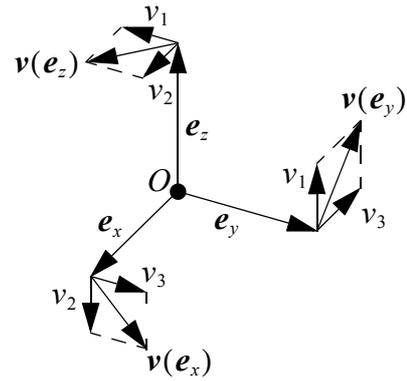
1.4 Räumliche Bewegungen

Lernziele

- Sie können sich unter der Kreiselung eines starren Körpers etwas vorstellen und kennen deren mathematische Beschreibung.
- Sie können bei einer Kreiselung mit gegebener Rotationsgeschwindigkeit die Geschwindigkeiten beliebiger Punkte formal berechnen und geometrisch beschreiben. Sie können den Vektor der Rotationsgeschwindigkeit ihrer Kommilitonin anschaulich beschreiben (Richtung, Betrag), ebenso seinen Zusammenhang zur momentanen Rotationsachse. Sie wissen, dass sich die Punkte des Körpers momentan auf Kreisbahnen um die momentane Rotationsachse bewegen.
- Sie können sich die Zerlegung in Translationsbewegung und Kreiselung vorstellen. Sie kennen die entsprechende Formel und können sie interpretieren und anwenden.
- Sie kennen die charakteristischen zwei Vektoren zur Beschreibung der Bewegung eines starren Körpers (Kinematik). Sie können die Kinematik bestimmen, wenn genügend Geschwindigkeiten vorgegeben sind. Sie können daraus die Geschwindigkeiten anderer Punkte berechnen.
- Sie können die Invarianten der Kinematik berechnen und daraus auf den Typ des Bewegungszustands schliessen.

Wir wollen uns jetzt von der Beschränkung auf ebene Bewegungen lösen und die Bewegung von starren Körpern im Raum studieren. Dazu betrachten wir vorerst wieder eine spezielle Starrkörperbewegung, nämlich die **Kreiselung**. Sie ist dadurch charakterisiert, dass *ein Punkt des Körpers fixiert bleibt*.

Wir studieren die kartesischen Einheitsvektoren \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z bei einer Kreiselung um den Punkt O . Aus dem SdpG (1.10) folgt, dass die Geschwindigkeiten $\mathbf{v}(\mathbf{e}_\alpha)$, $\alpha = x, y, z$ der Pfeilspitzen jeweils senkrecht zur entsprechenden Koordinatenachse sein müssen. Wieder aus dem SdpG, formuliert für die Verbindungen der drei Pfeilspitzen, ergeben sich die drei skizzierten Geschwindigkeitskomponenten v_i , $i = 1, 2, 3$, aus denen die Geschwindigkeiten zusammengesetzt werden können.



Etwas willkürlich führen wir einen Vektor

$$\boldsymbol{\omega} = (v_1, v_2, v_3)$$

ein und erhalten für die Geschwindigkeiten der Endpunkte der Koordinateneinheitsvektoren \mathbf{e}_α ($\alpha = x, y, z$) die Gleichungen

$$\mathbf{v}(\mathbf{e}_\alpha) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_\alpha \quad \text{für } \alpha = x, y, z. \quad (1.13)$$

Damit können wir einfach den folgenden Satz beweisen (vergleiche mit Formel (1.12)!):

Satz:

Eine Kreiselung ist momentan eine Rotation. Die Geschwindigkeit \mathbf{v}_P eines beliebigen Punktes P mit Ortsvektor \mathbf{r}_P berechnet sich zu

$$\boxed{\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P}. \quad (1.14)$$

Beweis:

Gemäss (1.13) gilt (1.14) für die Vektoren \mathbf{e}_α ($\alpha = x, y, z$). Es geht also noch darum, diese Beziehung auf alle Vektoren zu verallgemeinern.

Strategie: Wir wollen in einem ersten Schritt i) zeigen, dass Formel (1.14) eine Starrkörperbewegung beschreibt. Im zweiten Schritt ii) zeigen wir, dass die wirklichen Geschwindigkeiten minus die durch (1.14) beschriebenen (Summe und Differenz erfüllen auch den SdpG) den Starrkörperbewegungszustand der Ruhe beschreiben. Und im dritten Schritt iii) zeigen wir, dass tatsächlich eine Rotation vorliegt.

i) Alle Geschwindigkeiten der Form

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

erfüllen den SdpG (1.10), da für beliebige P und Q

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P) \cdot (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q) - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_Q) \cdot (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q) = (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q)) \cdot (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q) = 0$$

gilt.

- ii) Es seien nun \mathbf{v} die wirklichen Geschwindigkeiten der Punkte \mathbf{r} bei der Kreiselung. Als Starrkörperbewegungen erfüllen sie ebenfalls den SdpG. Damit erfüllen auch die Geschwindigkeiten

$$\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (1.15)$$

den SdpG und stellen eine Starrkörperbewegung dar. Für

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_\alpha \quad (\alpha = x, y, z)$$

verschwindet nun aber dank (1.13) der Vektor (1.15). Drei nicht kollineare Punkte sind also bei einer Starrkörperbewegung in Ruhe. Wieder aus dem SdpG ergibt sich

$$\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

für alle Punkte des Körpers, und damit ist (1.14) bewiesen.

- iii) Alle Punkte mit $\mathbf{r} \parallel \boldsymbol{\omega}$ sind nach (1.14) in Ruhe. Deshalb liegt *momentan* eine *Rotation* vor. Damit ist auch die erste Behauptung des Satzes bewiesen. ■

Die Gerade durch O in Richtung $\boldsymbol{\omega}$ heisst **Momentanachse**.

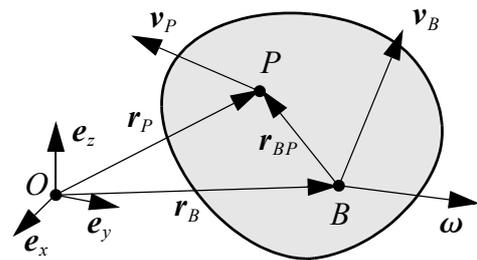
Aus Translation und Kreiselung können wir die *allgemeine Bewegung* eines starren Körpers zusammensetzen:

Die Geschwindigkeit eines körperfesten Bezugspunktes B sei \mathbf{v}_B . Den Ortsvektor \mathbf{r}_P zu einem beliebigen Punkt P des Körpers zerlegen wir jetzt gemäss

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{BP}.$$

Durch Ableiten ergibt sich

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_B + \dot{\mathbf{r}}_{BP}.$$



Der Vektor \mathbf{r}_{BP} hat konstante Länge und ist ein Ortsvektor in einem System mit Ursprung in B . Seine Bewegung ist eine Kreiselung um B . Für seine Ableitung ergibt sich also

$$\dot{\mathbf{r}}_{BP} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BP}.$$

Damit erhalten wir die wichtige Beziehung, oft **Starrkörperformel** genannt

$$\boxed{\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BP}}. \quad (1.16)$$

Die Geschwindigkeit irgendeines Punktes eines starren Körpers ist also bestimmt durch zwei Vektoren: die **Translationsgeschwindigkeit** \mathbf{v}_B eines Punktes B und die **Rotationsgeschwindigkeit** $\boldsymbol{\omega}$. Das Paar $\{\mathbf{v}_B, \boldsymbol{\omega}\}$ heisst **Kinemate**.

Bemerkung

Wir verwenden bewusst den Begriff «Rotationsgeschwindigkeit» und nicht «Winkelgeschwindigkeit», wenn wir den Bewegungszustand eines starren Körpers charakterisieren: Im Gegensatz zur ebenen Bewegung kann bei einer räumlichen Bewegung der Vektor der Rotationsgeschwindigkeit nicht mehr einfach als Ableitung von Winkeln beschrieben werden. Die Mathematik von Rotationen ist komplizierter als diejenige von Translationen. Das werden wir auch im Kapitel über Dynamik sehen.

Bemerkung

Wenn die Gleichung (1.16) links und rechts skalar mit \mathbf{r}_{BP} multipliziert wird, folgt daraus sofort der SdpG. Dieser ist also von der Starrkörperformel (1.16) linear abhängig.

Der momentane Bewegungszustand eines starren Körpers ist durch 6 skalare Größen bestimmt. Ein freier, starrer Körper im Raum hat also 6 «Bewegungsmöglichkeiten». Dieser (lokale) *Freiheitsgrad* deckt sich für einen ungebundenen starren Körper mit dem auf Seite 5 definierten (globalen) Freiheitsgrad, der Zahl der notwendigen Lagekoordinaten. Die folgende Bemerkung zeigt aber, dass das nicht immer so sein muss. Deshalb wollen wir ab jetzt unter *Freiheitsgrad* die Zahl der freien Geschwindigkeits- und Rotationsgeschwindigkeitskomponenten verstehen, also den lokalen Freiheitsgrad.

Bemerkung

Für Systeme mit Bindungen kann der Begriff des Freiheitsgrads vertrackter sein: Es gibt auch sog. «nichtholonome» Bindungen, bei denen der lokale Freiheitsgrad kleiner als der globale ist. Ein Beispiel dafür ist ein auf einer Ebene gleitender (immer vertikal gestellter) Schlittschuh. Er kann durch Drehen (um die Vertikalachse) und Gleiten in Kufenrichtung irgendwo mit beliebigem Drehwinkel platziert werden, hat also globalen Freiheitsgrad 3 (z.B. zwei Koordinaten für den Mittelpunkt und eine für den Drehwinkel). Seine Geschwindigkeit darf aber nur in Kufenrichtung zeigen, hat also nur 2 freie Parameter (Schnelligkeit in Kufenrichtung, Rotationsgeschwindigkeit um die Vertikalachse). Damit ist der lokale Freiheitsgrad 2 und kleiner als der globale. (Mathematisch: Eine nichtholonome Bindungsgleichung ist kein vollständiges Differential der Lagekoordinaten.)

Wie hängt die Kinemate $\{\mathbf{v}_A, \boldsymbol{\omega}'\}$ bezüglich eines anderen Punktes A mit derjenigen bezüglich B zusammen? Die Translationsgeschwindigkeit haben wir mit (1.16) schon berechnet:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BA}.$$

Die Geschwindigkeit des Punktes P berechnet sich zu

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}_{AP}.$$

Zusammen mit (1.16) erhalten wir

$$\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}_{AP} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BA} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BP} = \mathbf{0}.$$

Nun ist aber

$$\mathbf{r}_{BP} = \mathbf{r}_{BA} + \mathbf{r}_{AP}.$$

Daraus ergibt sich

$$(\boldsymbol{\omega}' - \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r}_{AP} = \mathbf{0}$$

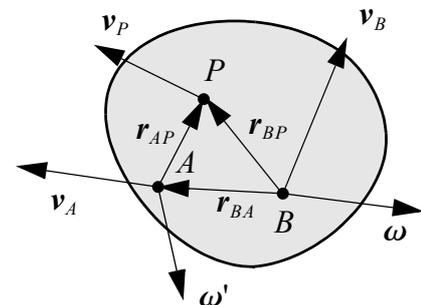
und, weil P beliebig ist,

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}'.$$

Somit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz:

Die Rotationsgeschwindigkeit ist vom Bezugssystem unabhängig.



Man sagt auch, die Rotationsgeschwindigkeit sei eine (vektorielle) **Invariante** der Kinemate. Sofort stellt sich natürlich die Frage nach weiteren Invarianten. Tatsächlich ist nach (1.16) auch noch

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_P.$$

Wir haben also eine vektorielle Invariante I_1 und eine skalare Invariante I_2 der Kinemate $\{\mathbf{v}_B, \boldsymbol{\omega}\}$ eines starren Körpers gefunden:

$$I_1 = \boldsymbol{\omega}, \quad (1.17)$$

$$I_2 = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_B. \quad (1.18)$$

Um die allgemeinen Bewegungszustände von starren Körpern im Raum klassifizieren zu können, müssen wir noch eine letzte spezielle Bewegung einführen, nämlich die **Schraubung**. Sie besteht aus der Überlagerung einer *Rotation* mit einer *Translation in Richtung der Rotationsachse*. Die Bewegung von Propellern oder Schrauben sind technische Beispiele von Schraubungen.

Satz:

Eine starre Bewegung im Raum ist momentan entweder eine Translation, eine Rotation oder ein Schraubung, und zwar

- eine Translation, falls $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ ist,
- eine Rotation, falls $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$ und $I_2 = 0$ ist,
- eine Schraubung, falls $I_2 \neq 0$ ist.

Beweis:

Die Kinemate des Körpers bezüglich eines Punktes B sei $\{\mathbf{v}_B, \boldsymbol{\omega}\}$.

i) Falls $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ ist, so ergibt sich dank (1.16)

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_B \text{ für alle } P.$$

Also liegt eine Translation vor.

ii) Es sei also $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$.

Jetzt suchen wir einen Punkt A derart, dass entweder $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$ oder $\mathbf{v}_A \parallel \boldsymbol{\omega}$ ist, d.h.

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A = \mathbf{0}.$$

Unter Verwendung von (1.16) erhalten wir

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BA}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_B + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{BA})\boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{r}_{BA}. \quad (1.19)$$

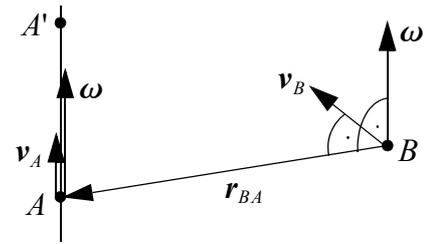
Wenn wir einen Punkt A gefunden haben, der diese (vektorielle) Gleichung erfüllt, so wird mit ihm jeder Punkt A' auf der Geraden durch A in Richtung $\boldsymbol{\omega}$ die Gleichung erfüllen, denn

$$\mathbf{v}_{A'} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AA'} = \mathbf{v}_A.$$

Wir können deshalb den speziellen Punkt A wählen, für den auch noch $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}_{BA}$ gilt. Damit lässt sich (1.19) nach \mathbf{r}_{BA} auflösen, und wir erhalten

$$\mathbf{r}_{BA} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_B}{\omega^2}.$$

Falls nun $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$ ist, so liegt eine Rotation vor, ansonsten eine Schraubung. ■



Die Achse durch A in Richtung $\boldsymbol{\omega}$ nennen wir **Zentralachse**.

Beispiel: Rechteckplatte

Bei der skizzierten Rechteckplatte sind die nicht verschwindenden Komponenten der Geschwindigkeiten in den Eckpunkten eingezeichnet.

Wie gross müssen u, v und w gewählt werden, damit eine Starrkörperbewegung vorliegt? Diskutiere die Bewegung!

Es ist

$$\gamma = \arctan \frac{a}{b}.$$

Aus dem SdpG ergibt sich sofort

$$u = w,$$

$$v \cos \gamma = w(\cos \gamma - \sin \gamma)$$

also, nach Multiplikation mit der Länge der Diagonalen,

$$vb = u(b - a).$$

Wir gehen nun von der in x, y, z -Koordinaten gegebenen Geschwindigkeit $\mathbf{v}_O = (0, u, -u)$ aus und berechnen mit (1.16) die Geschwindigkeit des Punktes P:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (a, 0, 0).$$

Mit $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ ergeben sich zwei nichttriviale Gleichungen:

$$a\omega_z + u = v,$$

$$-a\omega_y - u = v.$$

Analog erhalten wir beim Punkt Q die Gleichungen

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (0, b, 0),$$

$$-b\omega_z = w,$$

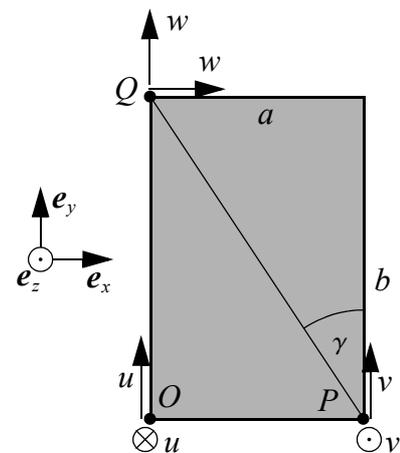
$$b\omega_x - u = 0.$$

Diese Gleichungen lösen wir für $\boldsymbol{\omega}$ auf und erhalten

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{u}{b}, -\frac{u+v}{a}, -\frac{u}{b} \right) = \frac{u}{b} \left(1, 1 - \frac{2b}{a}, -1 \right).$$

Als Invarianten haben wir

$$I_1 = \boldsymbol{\omega},$$



$$I_2 = \frac{2u^2}{ab}(a-b).$$

Falls $\omega \neq 0$ ist, so liegt also für $a \neq b$ eine Schraubung und für $a = b$ ein Rotation mit Momentanachse durch P vor.

Kontrollfragen

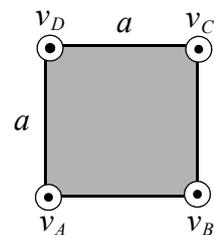
1. Was ist eine Kreiselung?
2. Ist eine Kreiselung momentan eine ebene Bewegung?
3. Ist eine Kreiselung momentan eine Rotation?
4. Ist jede starre Bewegung momentan eine Translation oder eine Rotation?
5. Was ist eine Schraubung?
6. Ist eine Schraubung eine ebene Bewegung?
7. Was ist die Kinemate?
8. Wie viele skalare Komponenten hat eine Kinemate im Raum und wie viele für eine ebene Bewegung?
9. Wie kann die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes P aus der Kinemate berechnet werden?
10. Welche Grösse in der Kinemate ist vom Bezugspunkt abhängig?
11. Welches sind die Invarianten der Kinemate?
12. Welche Invarianten verschwinden bei einer Translation?
13. Welche Invarianten verschwinden bei einer Rotation?
14. Welche Invarianten verschwinden bei einer Schraubung?

Übungen

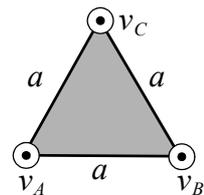
1. Der momentane Bewegungszustand eines starren Körpers sei durch $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ gegeben. Zeigen Sie, dass dies wirklich eine starre Bewegung ist, d.h., dass der Satz der projizierten Geschwindigkeiten für zwei beliebige Punkte erfüllt ist!
2. Berechnen Sie die zeitlichen Änderungen der Einheitsvektoren \mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_φ , \mathbf{e}_z der Zylinderkoordinaten, indem Sie für das Dreibein eine Rotation mit $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{e}_z$ ansetzen.

3. Der momentane Bewegungszustand einer quadratischen Platte mit der Seitenlänge a ist durch die Geschwindigkeiten der vier Eckpunkte gegeben. Diese stehen alle auf der Ebene der Platte senkrecht.

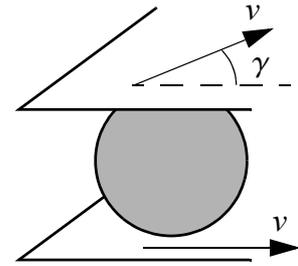
Welche Beziehung muss zwischen v_A , v_B , v_C und v_D bestehen, damit ein starrer Bewegungszustand vorliegt? Unter welcher Bedingung ist die Bewegung eine Translation? Ist eine Schraubung möglich?



4. Der momentane Bewegungszustand einer Platte von der Form eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a ist durch die Geschwindigkeiten der Eckpunkte gegeben. Diese stehen alle senkrecht auf der Ebene der Platte. Bestimmen Sie die Kinemate in A und diskutieren Sie die Bewegung!



5. Zwei Horizontalebenen bewegen sich translatorisch mit horizontalen Geschwindigkeiten vom Betrag v die einen Winkel γ einschliessen. Eine Kugel, deren Durchmesser mit dem Abstand der beiden Ebenen übereinstimmt, rollt auf beiden Ebenen ab. Bestimmen Sie den Bewegungszustand der Kugel unter der Annahme, dass die Rotationsgeschwindigkeit horizontal sei. Für welche γ ist die Bewegung eine Translation (Rotation, Schraubung)?



1.5 Kraft und Moment

Lernziele

- Sie wissen, welche mathematischen Grössen zur Charakterisierung einer Kraft nötig sind.
- Sie wissen, dass Kräfte diskret oder verteilt auftreten bzw. modelliert werden können.
- Sie kennen das Reaktionsprinzip als Grundprinzip der Mechanik.
- Sie können Systeme sinnvoll abgrenzen und wissen, weshalb das Freischneiden so wichtig ist.
- Sie können zwischen inneren und äusseren Kräften eines Systems unterscheiden.
- Sie können das Moment einer Kraft bezüglich eines Punktes formal (durch Kreuzprodukt) berechnen.
- Sie wissen, wie man Richtung und Betrag des Moments geometrisch bestimmt.
- Sie können sich unter dem Moment etwas vorstellen.
- Sie sind sich bewusst, dass das Moment bez. einer Achse eine praktische Rechen- oder Kontrollmöglichkeit liefert, auf die Sie vielleicht später zurückkommen möchten.

Die **Kraft** ist ein Grundbegriff der Mechanik. Sie entspricht einer Modellvorstellung und manifestiert sich durch ihre *Wirkung* (Deformation, Veränderung des Bewegungszustandes etc.). Physikalisch kennt man vier Grundkräfte (Gravitation, schwache, starke und elektromagnetische Wechselwirkung), welche sich teilweise vereinheitlichen lassen. In der Mechanik ist es sinnvoll, die Wirkung der Kombination von Elementarkräften integral zu betrachten und so z.B. von Kontaktkräften, Kohäsionskräften oder Reibungskräften zu sprechen.

Mathematisch wird eine Kraft durch einen *Vektor* dargestellt, welcher am (materiellen) **Angriffspunkt** der Kraft festgemacht ist. Die Gerade durch den Angriffspunkt in Richtung des Kraftvektors heisst **Wirkungslinie** (in der Skizze g).

Zwei (oder mehr) Kräfte dürfen gemäss der *Parallelogrammregel* vektoriell addiert werden, sofern sie *denselben Angriffspunkt* haben.

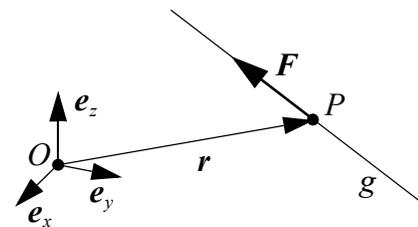
Die Einheit der Kraft ist das **Newton**.

$$1\text{N} = 1\text{m kg s}^{-2}.$$

Beispiel: Kraft eines Leiters auf eine Probeladung

Gemäss dem *Coulombschen Gesetz* ziehen sich zwei ungleichartig geladene Punktladungen Q_1 und Q_2 mit der Kraft

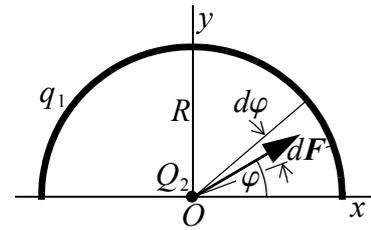
$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{|Q_1||Q_2|}{r^2} \quad (1.20)$$



an. Dabei steht r für den Abstand zwischen den Ladungen und $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ für die *Permittivität* oder *Dielektrizitätskonstante* des Mediums zwischen den Ladungen (ϵ_0 : elektrische Feldkonstante, ϵ_r : Permittivitätszahl).

Wir betrachten einen halbkreisförmigen, geladenen Leiter (Radius R , Ladung pro Längeneinheit q_1) und eine ungleich mit Q_2 geladene Probeladung in O . Gemäss dem Coulombschen Gesetz (1.20) ist die durch den Leiter auf die Probeladung ausgeübte Kraft pro Längeneinheit des Leiters

$$f = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{|q_1||Q_2|}{R^2}.$$



Wir suchen die gesamte, vom Leiter auf die Ladung ausgeübte Einzelkraft.

Von einem Bogenelement $d\varphi$ aus wirkt eine radiale Kraft vom Betrag $dF = fRd\varphi$ (Kraft pro Längeneinheit mal Länge des Elements). Alle Kräftelemente greifen an der Probeladung an, also im gleichen Punkt. Deshalb können wir sie vektoriell addieren.

In Komponenten zerlegt, erhalten wir die folgenden Kräftelemente:

$$dF_x = fR \cos\varphi d\varphi,$$

$$dF_y = fR \sin\varphi d\varphi.$$

Die Summation der infinitesimalen Kraftbeiträge liefert:

$$F_x = \int_0^\pi fR \cos\varphi d\varphi,$$

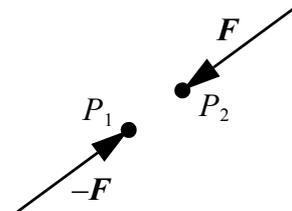
$$F_y = \int_0^\pi fR \sin\varphi d\varphi.$$

Damit ist die auf die Probeladung ausgeübte Kraft

$$\mathbf{F} = (0, 2fR, 0).$$

Einzelkräfte sind meist Idealisierungen. Genau betrachtet liegen oft, wie im obigen Beispiel, (Linien-, Flächen-, Raum-) **Kraftdichten** vor.

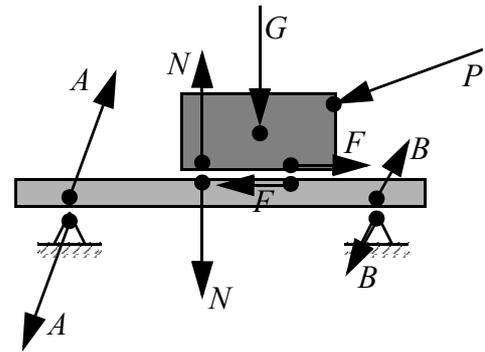
Im Beispiel übt auch die Probeladung auf den Halbkreis eine Kraft aus, und zwar in umgekehrter Richtung. Dies ist eine allgemeine Eigenschaft von Kräften, die sich nur aus der Beobachtung der Natur und nicht aus unseren bisherigen Überlegungen ableiten lässt. Sie ist eines der wenigen Prinzipien, die wir unserer Mechanik zu Grunde legen. Die ursprüngliche Formulierung für Massenpunkte stammt von *Newton* (1642-1727).



Reaktionsprinzip:

Übt ein materieller Punkt P_1 auf einen anderen materiellen Punkt P_2 die Kraft \mathbf{F} (in P_2) aus (Actio), so übt P_2 auf P_1 eine Kraft $-\mathbf{F}$ (in P_1) aus (Reactio). Beide Kräfte haben dieselbe Wirkungslinie.

Bei **Kontaktkräften** greifen Actio und Reactio im gleichen geometrischen Punkt, dem Berührungspunkt an (aber an verschiedenen Körpern, an verschiedenen materiellen Punkten). Bei **Fernkräften** liegen die beiden Kräfte auf der Verbindungsgeraden der beiden betrachteten Punkte.



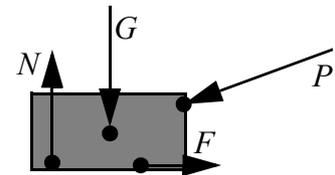
Man spricht von **äusseren Kräften**, wenn die Reactio ausserhalb des betrachteten Systems angreift und von **inneren Kräften**, wenn sie innerhalb des Systems angreift.

Wegen des Reaktionsprinzips heben sich die inneren Kontaktkräfte auf.

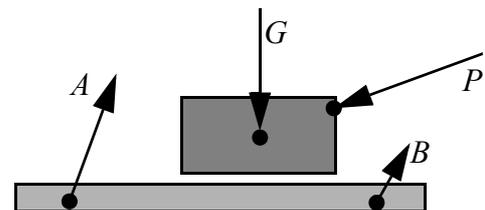
☞ *Daraus ergibt sich eine wichtige Konsequenz:* Man muss sich immer zuerst klar machen, welches **System** man untersuchen will. In die Rechnung gehen dann genau die Kräfte ein, welche am gewählten System angreifen. Dieser Arbeitsschritt heisst **Freischneiden**.

Beispiel: Verschiedene Systemabgrenzungen

Wenn wir den Klotz allein betrachten, so sind G, P, N und F die äusseren Kräfte am System.



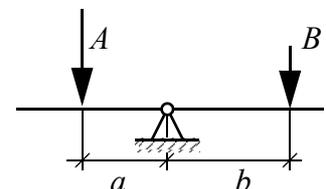
Wir können aber auch Klotz und Brett zusammen freischneiden. Dann sind G, P, A und B die äusseren Kräfte, während sich die inneren Kräfte N und F zu null addieren und aus den Rechnungen herausfallen.



In diesen Zeichnungen haben wir die Kräfte nicht als Vektoren (fett) beschriftet sondern mit ihrem Betrag.

Damit meinen wir Kräfte, die in die gezeichnete Richtung zeigen und den gegebenen Betrag haben. Falls die Rechnung einen negativen Betrag ergibt, so zeigt die Kraft in die umgekehrte Richtung. Je nach Situation wird die Spitze oder das Ende des Vektors im Angriffspunkt gezeichnet.

Bei **Kräften mit unterschiedlichen Angriffspunkten** erhält man durch die vektorielle Addition nur einen Teil der Information. Schon im Altertum war das Hebelgesetz bekannt:



Eine Balkenwaage, die in den Abständen a und b links und rechts der Auflage von den senkrechten Kräften A und B belastet ist, ist genau dann in Ruhe, wenn

$$aA = bB$$

gilt.

Entscheidend ist also neben dem Kraftvektor auch eine Grösse, die sich im einfachsten Fall aus dem Produkt einer Kraft mit einer Länge berechnen lässt. Dies führt auf die Definition des **Moments** M_O einer Kraft F (mit Angriffspunkt P) **bezüglich** O (wobei $r = OP$ ist):

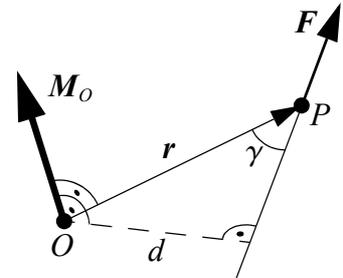
$$\boxed{M_O = r \times F}. \tag{1.21}$$

☞ *Achtung: Das Moment ist vom Bezugspunkt abhängig!*

Die *Einheit* des Momentes ist das **Newton-Meter**

$$1 \text{ Nm} = 1 \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2}.$$

Die *Richtung* des Momentes ist senkrecht zum Kraftvektor F und zum Ortsvektor r , die Orientierung wird durch die *Korkenzieher-* oder *Rechte-Hand-Regel* gegeben.



Für den Betrag erhalten wir

$$M_O = rF \sin \gamma = dF. \tag{1.22}$$

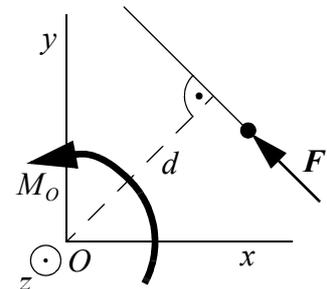
Hier bezeichnet d den kürzesten Abstand der Wirkungslinie der Kraft vom Bezugspunkt O . Diese Länge nennt man **Hebelarm** (in der Physikkliteratur manchmal auch *Kraftarm*).

Aus (1.22) wird sofort klar, dass sich das Moment nicht ändert, wenn die Kraft längs ihrer Wirkungslinie verschoben wird.

Falls man sich in die Ebene von Kraft und Ortsvektor begibt, so ist das Moment senkrecht zur Ebene gerichtet und hat die (z -)Komponente

$$M_O = \pm dF.$$

In der Zeichnung kann es durch seinen Drehsinn skizziert werden.



Beispiel: Kräfte am Würfel

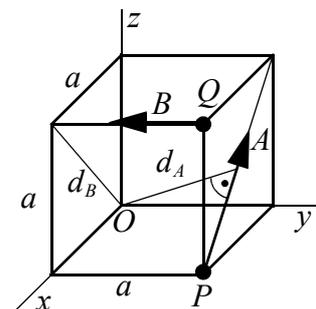
Am skizzierten Würfel greifen die Kräfte A (Angriffspunkt P , Betrag A) und B (Angriffspunkt Q , Betrag B) an:

$$A = \left(-\frac{A}{\sqrt{2}}, 0, \frac{A}{\sqrt{2}} \right),$$

$$B = (0, -B, 0),$$

$$r_A = (a, a, 0),$$

$$r_B = (a, a, a).$$



Die Momente dieser Kräfte bezüglich O berechnen sich damit folgendermassen:

$$M_O(A) = r_A \times A = \frac{aA}{\sqrt{2}}(1, -1, 1),$$

$$M_O(B) = r_B \times B = aB(1, 0, -1).$$

Aus obigen Formeln lassen sich die Beträge der Momente berechnen. Alternativ dazu können wir aber auch Formel (1.22) benutzen. Für die kleinsten Abstände d_A und d_B zwischen den Wirkungslinien von \mathbf{A} bzw. \mathbf{B} und O gilt

$$d_A = |\mathbf{PO}| \sin \angle(\mathbf{PO}, \mathbf{A}) = \left| \mathbf{PO} \times \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \right| = \left| (-a, -a, 0) \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right| = \left| \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}} \right) \right| = \sqrt{\frac{3}{2}} a,$$

$$d_B = \sqrt{2} a.$$

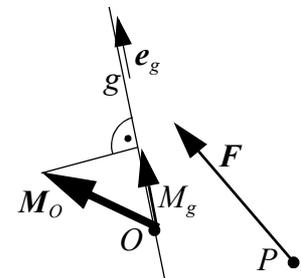
(Siehe Details in *Beispiel: Abstand Punkt-Gerade* auf Seite 115.)

Damit erhalten wir

$$|\mathbf{M}_O(\mathbf{A})| = M_O(\mathbf{A}) = \sqrt{\frac{3}{2}} a A,$$

$$|\mathbf{M}_O(\mathbf{B})| = M_O(\mathbf{B}) = \sqrt{2} a B.$$

Für die Momentberechnung von Kräften im Raum ist das **Moment M_g bezüglich einer Achse g** (auch: «Moment um die Achse g ») oft ein nützliches Hilfsmittel. Es bezeichnet die Projektion des Moments einer Kraft \mathbf{F} auf die gerichtete Gerade g durch den Bezugspunkt O . Das Moment bezüglich einer Achse ist die Verallgemeinerung der *Komponente* des Moments (bezüglich einer Koordinatenachse).



Wenn man die Richtung der Geraden g durch den Einheitsvektor \mathbf{e}_g festlegt, so interessiert nur noch die skalare Grösse

$$M_g = \mathbf{e}_g \cdot \mathbf{M}_O. \tag{1.23}$$

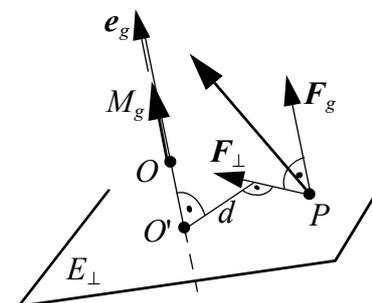
Insbesondere ist das Moment bezüglich einer Koordinatenachse gerade gleich der entsprechenden Komponente des Moments, z.B.

$$M_x = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{M}_O. \tag{1.24}$$

Für alle Punkte O' auf der Achse g gilt

$$(\mathbf{OP} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_g = (\mathbf{OO}' \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_g + (\mathbf{O}'\mathbf{P} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_g = (\mathbf{O}'\mathbf{P} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_g.$$

Also können wir zur Berechnung des Moments bezüglich der Achse den Bezugspunkt beliebig auf der Achse wählen. Wir nutzen diese Freiheit und wählen ihn so, dass O' in der Ebene E_\perp liegt, welche senkrecht auf g steht und den Angriffspunkt P der Kraft enthält. Nun zerlegen wir die Kraft \mathbf{F} in ihre Projektion \mathbf{F}_\perp in die Ebene und die Projektion \mathbf{F}_g auf g . Damit vereinfacht sich die Berechnung des Moments bez. g noch weiter:



$$\begin{aligned} M_g &= \mathbf{e}_g \cdot \mathbf{M}_O = \mathbf{e}_g \cdot \mathbf{M}_{O'} \\ &= \mathbf{e}_g \cdot (\mathbf{O}'\mathbf{P} \times (\mathbf{F}_\perp + \mathbf{F}_g)) \\ &= \mathbf{e}_g \cdot (\mathbf{O}'\mathbf{P} \times \mathbf{F}_\perp). \end{aligned}$$

Wenn wir den Abstand zwischen der Wirkungslinie von \mathbf{F}_\perp und O' mit d bezeichnen, so haben wir also

$$M_g = \pm d F_\perp. \tag{1.25}$$

Das Vorzeichen ergibt sich aus der Korkenzieherregel. Den Hebelarm d können wir in der gezeichneten Ebene E_{\perp} ablesen. Er ist gleichzeitig auch der (kleinste) Abstand zwischen der Wirkungslinie von F und der Geraden g .

☞ Wir finden also das Moment bezüglich einer Achse, indem wir die Kraft auf die Ebene senkrecht zur Achse projizieren, den Betrag der Projektion mit ihrem Abstand von der Achse multiplizieren und das richtige Vorzeichen aus der Korkenzieherregel ablesen.

Beispiel: Ablesen einer Momentkomponente

Nun wählen wir als spezielle Geraden g die Koordinatenachsen. So erhalten wir eine alternative Methode der Momentberechnung, die als Kontrolle von Handrechnungen und für das anschauliche Verständnis nützlich ist.

Es greife z.B. im Punkt mit Koordinaten (r_x, r_y, r_z) eine Kraft mit Komponenten (F_x, F_y, F_z) an. Wir suchen die x -Komponente ihres Moments bez. des Ursprungs O .

Dazu projizieren wir die Kraft auf die Ebene senkrecht zu x , also auf die rechts gezeichnete y - z -Ebene. Gemäss (1.24) ist M_{Ox} gleich dem Moment bezüglich der Geraden x . Gemäss (1.25) muss also der Hebelarm d mit dem Betrag der projizierten Kraft $|(F_y, F_z)|$ multipliziert werden. Formell ist also im gezeichneten Fall

$$M_{Ox} = d\sqrt{F_y^2 + F_z^2}, \tag{1.26}$$

mit positivem Vorzeichen, entsprechend dem Drehsinn gegen den Uhrzeigersinn. (Bei gleich gerichteter Kraft wäre das Vorzeichen des Moments negativ, falls die Wirkungslinie «auf der anderen Seite von O » liegen würde.)

Vielleicht soll, statt mit d und dem Betrag der projizierten Kraft, mit den Komponenten der Vektoren gearbeitet werden. Das erreichen wir, indem wir F_y und F_z als einzelne Kräfte betrachten. Die Wirkungslinie der Einzelkraft F_z hat Abstand r_y von O und liefert also gemäss (1.26) einen Anteil $r_y F_z$ zum Moment. Analog ist der Anteil von F_y zum Moment $-r_z F_y$, hier mit negativem Vorzeichen wegen des Drehsinns in Uhrzeigerichtung. Gesamthaft ist also

$$M_{Ox} = r_y F_z - r_z F_y.$$

Das ist, nicht sehr überraschend, die x -Komponente der Kreuzprodukts (1.21). Unsere Überlegungen sind also konsistent.

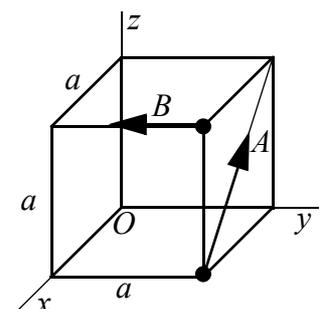
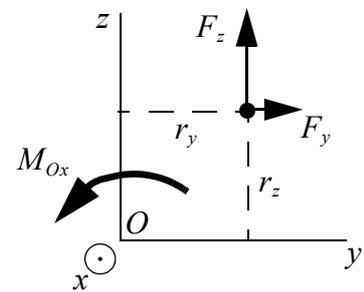
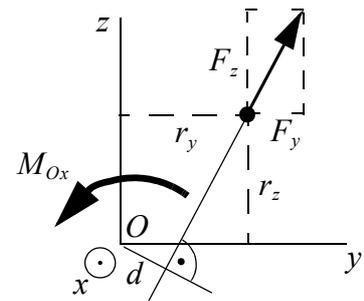
So oder mit (1.26) können wir auch die anderen Komponenten des Moments aus je einer Skizze der entsprechenden Projektion ablesen. Für einfache Geometrien geht das oft im Kopf. Bei komplizierteren Situationen führt allerdings nichts daran vorbei, Ortsvektor und Kraftvektor sauber in Komponenten zu zerlegen und das Kreuzprodukt auszurechnen.

Beispiel: Kräfte am Würfel

In unserem Beispiel können wir die Momente der Kräfte A und B direkt aus der Zeichnung ablesen, indem wir im Kopf (oder auf dem Papier) die obigen Projektionen zeichnen:

$$M_O(A) = \frac{aA}{\sqrt{2}}(1, -1, 1),$$

$$M_O(B) = aB(1, 0, -1).$$

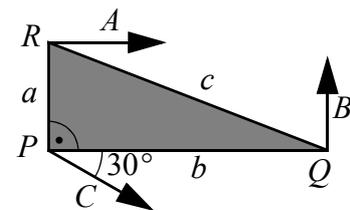
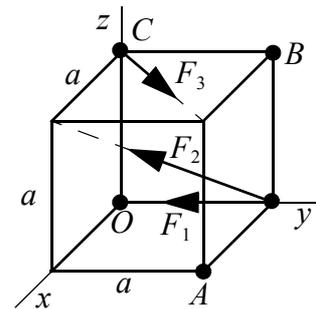


Kontrollfragen

1. Wodurch wird eine Kraft mathematisch dargestellt?
2. Was ist bei einer Kraft ausser ihrem Betrag und ihrer Richtung wesentlich?
3. Wie ist die Wirkungslinie einer Kraft definiert?
4. Was sind Kraftdichten?
5. Wie lautet das Reaktionsprinzip?
6. Haben Actio und Reactio immer denselben Angriffspunkt?
7. Was sind innere und äussere Kräfte an einem Körper?
8. Wie ist der Momentvektor definiert?
9. Ist der Momentvektor vom Bezugspunkt abhängig?
10. Welches ist der geometrische Ort aller Bezugspunkte, für die das Moment einer Kraft verschwindet?
11. Wie berechnet sich das Moment analytisch?
12. Wie bestimmt man das Moment geometrisch?
13. Was ist der Hebelarm?
14. Welche Richtung hat der Momentvektor?
15. Welches sind die Einheiten von Kraft und Moment?

Übungen

1. Bestimmen Sie die Momente der drei am skizzierten Würfel der Kantenlänge a eingezeichneten Kräfte bezüglich des Ursprungs O !
Bestimmen Sie den Momentvektor der am skizzierten Würfel eingezeichneten Kraft F_1 bezüglich der drei Punkte A , B und C !
2. Bestimmen Sie die Momente der drei skizzierten Kräfte A (in R), B (in Q), und C (in P) bezüglich jedes Eckpunkts (P , Q und R) der skizzierten dreieckigen Platte PQR !

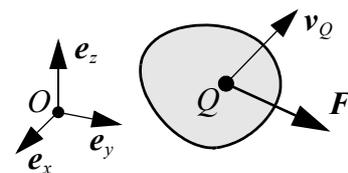


1.6 Leistung

Lernziele

- Sie können die Leistung einer Kraft bei gegebenem Bewegungszustand berechnen.
- Sie kennen Beispiele von leistungsfreien Kräften.

Wir haben bisher Bewegungen (dargestellt durch Geschwindigkeiten) und Kräfte kennengelernt. Der nächste Begriff verknüpft diese beiden Grössen: Für eine Kraft \mathbf{F} mit Angriffspunkt Q ist die **Leistung** \mathcal{P} definiert durch



$$\boxed{\mathcal{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_Q}. \quad (1.27)$$

Die *Einheit* der Leistung ist das **Watt**:

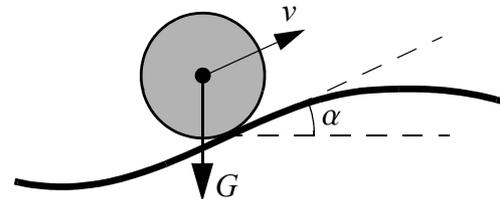
$$1\text{W} = 1\text{J s}^{-1} = 1\text{N m s}^{-1} = 1\text{ m}^2 \text{ kg s}^{-3}.$$

Beispiel: Rollende Kugel

Eine Kugel rollt über einen Hügel. Wir betrachten die Gewichtskraft G und berechnen deren Leistung:

$$\mathcal{P} = -Gv\sin\alpha.$$

Sie ist also nur von der vertikalen Komponente der Geschwindigkeit abhängig. Für *horizontale* Bewegungen ist die Gewichtskraft leistungslos.



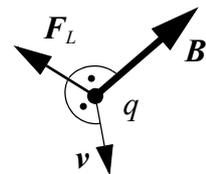
Eine Kraft mit $\mathcal{P} = 0$ heisst **leistungslos**. Sie steht immer senkrecht auf der Geschwindigkeitsrichtung.

Beispiel: Lorentz-Kraft

Die Kraft eines Magnetfeldes \mathbf{B} auf eine sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegendes Ladung q gehorcht dem *Lorentz'schen Kraftgesetz*

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Sie ist also senkrecht zur Geschwindigkeit und damit immer leistungslos.



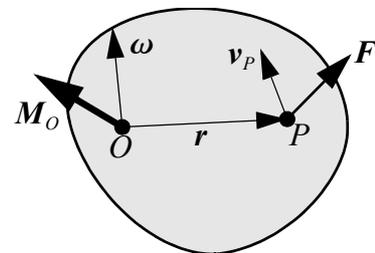
Beispiel: Reine Rotation

Ein Körper rotiere mit ω um eine Achse durch O . In P greift die Kraft \mathbf{F} an. Die Geschwindigkeit von P ($\mathbf{r} = \mathbf{OP}$) ergibt sich zu

$$\mathbf{v}_P = \omega \times \mathbf{r}.$$

Damit wird die Leistung von \mathbf{F}

$$\mathcal{P} = \mathbf{v}_P \cdot \mathbf{F} = (\omega \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{F} = (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot \omega = \mathbf{M}_O \cdot \omega.$$



Für eine *reine Rotation* lässt sich die Leistung also sehr einfach aus dem Moment berechnen:

$$\mathcal{P} = \mathbf{M}_O \cdot \omega. \quad (1.28)$$

Die *Gesamtleistung* von mehreren Kräften definieren wir als die Summe der Leistungen der einzelnen Kräfte:

$$\mathcal{P} = \sum_i \mathcal{P}_i \quad (1.29)$$

Beispiel: Kräfte am Würfel

Die Kinemate eines Würfels bezüglich O ist gegeben durch die kartesischen Komponenten

$$\{\mathbf{v}_O, \boldsymbol{\omega}\} = \{(v, 0, 0), (0, \omega, 0)\}.$$

Gesucht ist die Gesamtleistung der skizzierten Kräfte A und B (vom Betrag A und B), d.h. die Summe ihrer Leistungen.

Diese Aufgabe kann verschieden angepackt werden:

Entweder berechnen wir zuerst die Geschwindigkeiten der Angriffspunkte der Kräfte und benützen direkt die Definition (1.27), oder wir berechnen zuerst den Anteil der Translation und dann mit (1.28) denjenigen der Rotation.

a) Mit den einzelnen Geschwindigkeiten erhalten wir

$$\mathbf{v}_A = (v, 0, -\omega a),$$

$$\mathbf{v}_B = (v + \omega a, 0, -\omega a),$$

$$\mathbf{A} = \left(-\frac{A}{\sqrt{2}}, 0, \frac{A}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\mathbf{B} = (0, -B, 0),$$

$$\mathcal{P} = \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{A} + \mathbf{v}_B \cdot \mathbf{B} = -\frac{vA}{\sqrt{2}} - \frac{\omega a A}{\sqrt{2}} = -(v + \omega a) \frac{A}{\sqrt{2}}.$$

b) Für die zweite Berechnungsvariante möge \mathcal{P}_T die Leistung der Translation und \mathcal{P}_R diejenige der Rotation bezeichnen.

$$\mathcal{P}_T = -\frac{vA}{\sqrt{2}}.$$

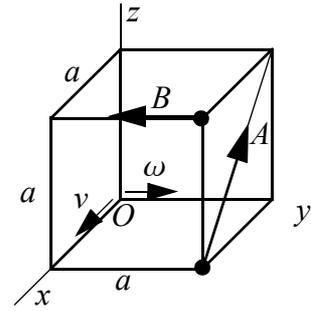
Die Momente haben wir schon im Beispiel auf Seite 26 berechnet. Die Leistung der Rotation ergibt sich also zu

$$\mathcal{P}_R = \mathbf{M}_O(\mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{M}_O(\mathbf{B}) \cdot \boldsymbol{\omega} = -\frac{\omega a A}{\sqrt{2}},$$

was auf dasselbe Resultat wie oben führt.

Kontrollfragen

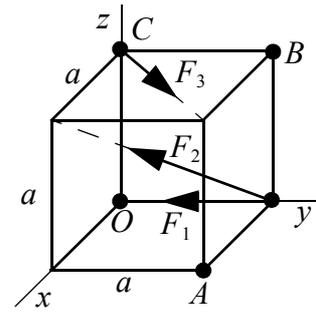
1. Wie ist die Leistung definiert?
2. Wie muss die Geschwindigkeit gerichtet sein, damit bei gegebener Schnelligkeit die Leistung einer Kraft \mathbf{F} maximal bzw. minimal wird?
3. Wann ist die Leistung einer Kraft null?
4. Wie gross ist die Leistung einer Kraft mit Moment \mathbf{M}_O bei einer Rotation um O ?
5. Welches ist die Einheit der Leistung?



Übungen

- Eine Kräftegruppe $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3\}$ besteht aus drei Kräften mit den skizzierten Richtungen und Komponenten F_1, F_2, F_3 . Bestimmen Sie die Leistung der Kräftegruppe im Falle

 - einer Translation mit Schnelligkeit v in x -Richtung,
 - einer Rotation mit Rotationsschnelligkeit ω um die z -Achse.
- Zeigen Sie, dass bei der Rotation eines Körpers die Leistung einer Kraft \mathbf{F} genau dann verschwindet, wenn die Rotationsachse die Wirkungslinie der Kraft schneidet oder parallel zu ihr ist!
- Zeige, dass das Moment einer Kraft \mathbf{F} bezüglich einer Achse g genau dann verschwindet, wenn die Wirkungslinie von \mathbf{F} mit g in einer Ebene liegt!



Kapitel 2: Statik

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Systemen, an denen mehrere Kräfte, sogenannte Kräftegruppen, angreifen. Unser Hauptinteresse werden *starre* Körper und aus mehreren starren Körpern zusammengesetzte Systeme sein; viele Resultate sind aber auch für allgemeinere *deformierbare* Körper nützlich.

In der *Statik* untersuchen wir, wann ein System in Ruhe sein kann. Die entsprechenden Bedingungen werden uns zum Beispiel erlauben, *Bindungskräfte* an ruhenden Systemen zu berechnen. Das ist eine wichtige Grundlage für die Wahl von geeigneten Formen, Grössen und Materialien in technischen Systemen – die *Dimensionierung*.

2.1 Äquivalenz und Reduktion von Kräftegruppen

Lernziele

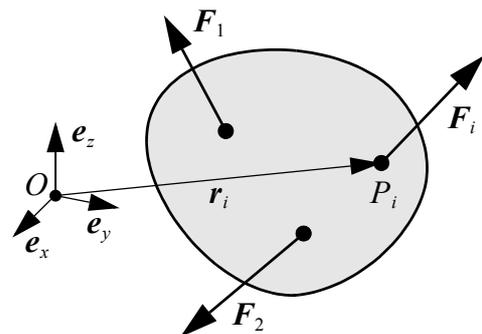
- Sie wissen, was eine Kräftegruppe charakterisiert und können Beispiele von Kräftegruppen angeben.
- Sie können die Resultierende und das resultierende Moment einer Kräftegruppe berechnen.
- Sie können die Gesamtleistung einer Kräftegruppe an einem starren Körper auf zwei Arten berechnen.
- Sie kennen zwei Charakterisierungen für die statische Äquivalenz von Kräftegruppen.
- Sie kennen die Eigenschaften eines Kräftepaars und können sich darunter etwas vorstellen.
- Sie können die charakteristische Grösse von statisch äquivalenten Kräftegruppen (Dynamie) berechnen. Sie können deren Invarianten bestimmen und daraus auf die einfachste statisch äquivalente Kräftegruppe schließen.
- Sie können bei gegebener Dynamie eine statisch äquivalente Kräftegruppe aus Einzelkraft und Kräftepaar angeben und sich vorstellen.
- Sie können die Dynamie in andere Bezugspunkte umrechnen.

Unterschiedliche Kräftegruppen an einem starren Körper können dieselbe Wirkung haben, z.B. ihn in Ruhe belassen. Solche Kräftegruppen heissen *äquivalent*. Es stellt sich also die Frage nach der einfachsten äquivalenten Kräftegruppe – wobei noch zu präzisieren sein wird, was man unter *einfach* verstehen soll. Die *Reduktion* von Kräftegruppen wird diese Frage beantworten.

Unter einer **Kräftegruppe** versteht man mehrere an einem System angreifende Kräfte, z.B. F_1, F_2, \dots, F_N . Symbolisch schreibt man

$$\{F_1, F_2, \dots, F_N\} = \{F_i\}.$$

Zu jeder Kraft F_i gehört immer auch ihr Angriffspunkt P_i , dargestellt durch den Ortsvektor r_i . Diese Punkte bzw. Vektoren werden zwar in der symbolischen Schreibweise einfachheitshalber unterdrückt, müssen aber dazugedacht werden.



Es wird sich bald weisen, dass die folgenden Grössen eine wichtige Rolle spielen:

Die **Resultierende \mathbf{R}** einer Kräftegruppe ist die vektorielle Summe aller Kräfte:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i. \quad (2.1)$$

Das **resultierende Moment** einer Kräftegruppe **bezüglich O** ist die Summe der einzelnen Momente der Kräfte bezüglich O :

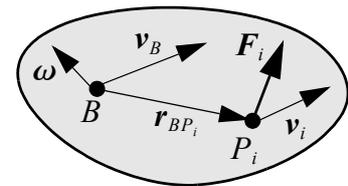
$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i. \quad (2.2)$$

Die **Gesamtleistung \mathcal{P}** einer Kräftegruppe ist die Summe der Leistungen der Einzelkräfte (vgl. (1.29)):

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^N \mathcal{P}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i. \quad (2.3)$$

Für eine *Starrkörperbewegung* mit Kinemate $\{\mathbf{v}_B, \boldsymbol{\omega}\}$ berechnen wir die Geschwindigkeiten \mathbf{v}_i der Angriffspunkte der Kräfte zu

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BP_i}.$$



Damit erhalten wir für die Gesamtleistung:

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i = \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \right) \cdot \mathbf{v}_B + \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BP_i})) = \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \right) \cdot \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_{BP_i} \times \mathbf{F}_i)$$

Daraus erhalten wir sofort folgende wichtige Formel für die Leistung einer Kräftegruppe bei einer Starrkörperbewegung:

$$\boxed{\mathcal{P} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_B + \mathbf{M}_B \cdot \boldsymbol{\omega}}. \quad (2.4)$$

Beachten Sie, dass nur die Kinemate, die Resultierende und das resultierende Moment in die Formel (2.4) eingehen!

Ausgehend von der Leistung definieren wir nun die **statische Äquivalenz** ($\{\mathbf{F}_i\} \Leftrightarrow \{\mathbf{G}_j\}$) von zwei Kräftegruppen $\{\mathbf{F}_i\}$, $\{\mathbf{G}_j\}$ dadurch, dass ihre Gesamtleistungen bei beliebigen Starrkörperbewegungen gleich sein sollen:

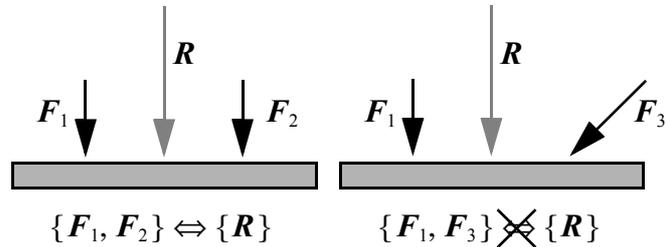
$$\mathcal{P}(\{\mathbf{F}_i\}) = \mathcal{P}(\{\mathbf{G}_j\}), \quad \forall \text{ Starrkörperbewegungen.} \quad (2.5)$$

Die Motivation für diese Definition kommt aus einer *energetischen* Betrachtungsweise, die sich in der Physik oft bewährt hat: Die beiden Kräftegruppen sollen im betrachteten Augen-

blick energetisch (Leistung mal Zeit) gleichwertig sein. Der auf das Beispiel folgende Satz wird einen Bezug zu unseren Definitionen (2.2) und (2.3) herstellen.

Beispiel: Statisch äquivalente und nicht äquivalente Kräftegruppen

Die statische Äquivalenz der Kräftegruppen im linken Bild ($|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2| = |\mathbf{R}|/2$) kann durch Berechnung der Leistung verschiedener Bewegungszustände vermutet (und auch bewiesen) werden. Bei den Gruppen rechts ($|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_3|/\sqrt{2} = |\mathbf{R}|/2$) zeigt eine Translation in horizontaler Richtung sofort, dass keine Äquivalenz vorliegen kann.



Satz:

Zwei Kräftegruppen sind genau dann statisch äquivalent, wenn ihre Resultierenden und ihre resultierenden Momente (bezüglich eines beliebigen Punktes P) gleich sind.

Beweis:

Wir bezeichnen die Kräftegruppen mit $\{F_i\}$ und $\{G_j\}$, ihre Resultierenden mit $\mathbf{R}(\{F_i\})$ und $\mathbf{R}(\{G_j\})$ sowie ihre Momente bezüglich eines beliebigen Punktes P mit $\mathbf{M}_P(\{F_i\})$ und $\mathbf{M}_P(\{G_j\})$. Aus (2.4) und (2.5) erhalten wir die folgenden, logisch gleichwertigen Aussagen:

$$\begin{aligned} & \{F_i\} \Leftrightarrow \{G_j\} \\ \Leftrightarrow & \mathcal{P}(\{F_i\}) = \mathcal{P}(\{G_j\}), \forall \text{ Starrkörperbewegungen} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{R}(\{F_i\}) \cdot \mathbf{v}_P + \mathbf{M}_P(\{F_i\}) \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}(\{G_j\}) \cdot \mathbf{v}_P + \mathbf{M}_P(\{G_j\}) \cdot \boldsymbol{\omega}, \forall \{\mathbf{v}_P, \boldsymbol{\omega}\} \\ \Leftrightarrow & (\mathbf{R}(\{F_i\}) - \mathbf{R}(\{G_j\})) \cdot \mathbf{v}_P + (\mathbf{M}_P(\{F_i\}) - \mathbf{M}_P(\{G_j\})) \cdot \boldsymbol{\omega} = 0, \forall \{\mathbf{v}_P, \boldsymbol{\omega}\} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt für alle \mathbf{v}_P und $\boldsymbol{\omega}$. Durch Wahl von Geschwindigkeiten und Rotationsgeschwindigkeiten, bei denen jeweils nur eine Komponente nicht verschwindet, folgern wir, dass die Resultierende und das resultierende Moment gleich sein müssen. Der Schluss in umgekehrter Richtung ist sofort klar. Also gilt:

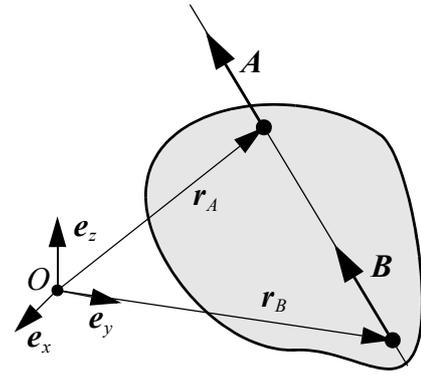
$$\begin{aligned} & ((\mathcal{P}(\{F_i\}) = \mathcal{P}(\{G_j\})), \forall \{\mathbf{v}_P, \boldsymbol{\omega}\}) \\ \Leftrightarrow & ((\mathbf{R}(\{F_i\}) = \mathbf{R}(\{G_j\})) \wedge (\mathbf{M}_P(\{F_i\}) = \mathbf{M}_P(\{G_j\}))) . \blacksquare \end{aligned}$$

Satz:

Zwei Kräfte sind genau dann statisch äquivalent, wenn sie vektoriell gleich sind und ihre Wirkungslinien übereinstimmen.

Beweis:

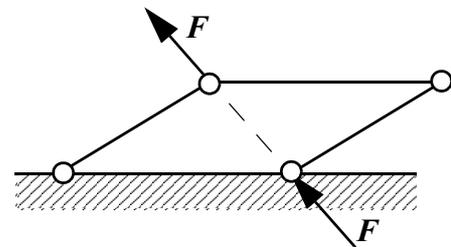
- i) «→»: Wir nehmen an, dass die zwei Kräfte statisch äquivalent seien. Aus obigem Satz folgt, dass die Resultierenden und die Momente gleich sein müssen. Aus der Gleichheit der Resultierenden ergibt sich sofort die vektorielle Gleichheit der Kräfte. Das Moment einer Kraft bezüglich eines Punktes auf ihrer Wirkungslinie verschwindet. Also muss auch die andere Kraft diese Wirkungslinie haben (oder verschwinden).
- ii) «←»: Die Umkehrung folgt sofort, z.B. mit (1.22). ■



Im Rahmen der statischen Äquivalenz, d.h., wie wir sehen werden, am *starreren Körper*, ist eine Kraft also ein **linienflüchtiger Vektor** und darf längs ihrer Wirkungslinie verschoben werden.

Für *deformierbare Körper* gilt dies aber nicht:

Die obere Kraft wird den nebenstehenden (gewichtlosen) Mechanismus bewegen, während die dazu statisch äquivalente untere Kraft keine Wirkung auf den Mechanismus hat.



Speziell einfach sind Kräftegruppen, welche die folgende Definition erfüllen: Eine Kräftegruppe $\{F_i\}$ heißt **statisch äquivalent null**, falls ihre Resultierende R und ihr resultierendes Moment M_O bezüglich O verschwinden:

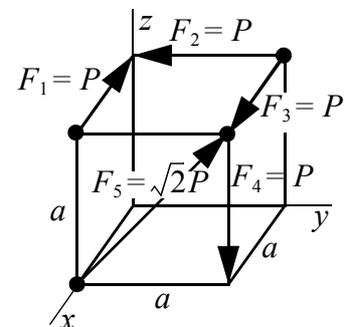
$$R(\{F_i\}) = \mathbf{0},$$

$$M_O(\{F_i\}) = \mathbf{0}.$$

Man spricht in diesem Fall auch von einem **Nullsystem** oder von einem **System im Gleichgewicht**. Symbolisch schreibt man $\{F_i\} \Leftrightarrow 0$.

Beispiel: Nullsystem

$F_1 = (-P, 0, 0),$	$M_{O1} = (0, -aP, 0),$
$F_2 = (0, -P, 0),$	$M_{O2} = (aP, 0, 0),$
$F_3 = (P, 0, 0),$	$M_{O3} = (0, aP, -aP),$
$F_4 = (0, 0, -P),$	$M_{O4} = (-aP, aP, 0),$
$F_5 = (0, P, P),$	$M_{O5} = (0, -aP, aP),$
$R = (0, 0, 0);$	$M_O = (0, 0, 0).$

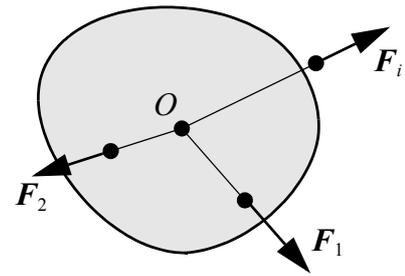


Beispiel: Kräftegruppe mit Wirkungslinie durch denselben Punkt

Falls die Wirkungslinien aller Kräfte durch einen Punkt (hier O) gehen, spricht man auch von einer **zentralen Kräftegruppe**. Bezüglich dieses Punktes verschwindet das resultierende Moment:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i,$$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{0}.$$



Die zentrale Kräftegruppe ist also genau dann ein Nullsystem, wenn die Resultierende null ist.

Die an einem Massenpunkt (siehe Abschnitt 3.3) angreifenden Kräfte bilden eine zentrale Kräftegruppe.

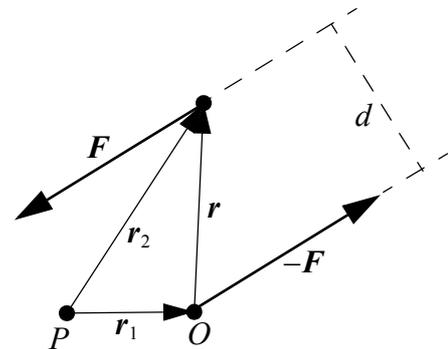
Eine andere speziell ausgezeichnete Kräftegruppe ist das **Kräftepaar**. Es besteht aus zwei Kräften gleichen Betrags, die (auf verschiedenen Wirkungslinien) entgegengesetzte Richtung haben:

$$\mathbf{R} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Der Betrag des Moments berechnet sich mit (1.22) einfach aus dem Abstand der Wirkungslinien:

$$M_O = dF.$$



Das Moment ist hier unabhängig vom Bezugspunkt:

$$\mathbf{M}_P = -\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}_O = \mathbf{M}.$$

Weil bei einem Kräftepaar das Moment \mathbf{M} vom Bezugspunkt unabhängig ist, kann man in diesem Fall den Index weglassen.

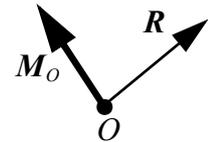
☞ *Das Moment einer Einzelkraft ist vom Bezugspunkt abhängig. Auch das resultierende Moment einer Kräftegruppe ist im Allgemeinen vom Bezugspunkt abhängig. Deshalb muss dieser in der Notation erkennbar sein. Die einzige Ausnahme ist die sehr spezielle Kräftegruppe eines Kräftepaars.*

Ein gegebener Momentenvektor \mathbf{M} lässt sich durch unendliche viele verschiedene Kräftepaare realisieren: Es müssen nur die beiden Kraftvektoren in einer Ebene senkrecht zu \mathbf{M} liegen und die Formel $M = dF$ gelten.

Kräftepaare werden manchmal salopp auch als **Momente** oder **freie Momente** bezeichnet. Man muss aber klar auseinanderhalten zwischen dem *Moment einer Kraft* (oder einer Kräftegruppe) und der speziellen *Kräftegruppe* «Moment» (= Kräftepaar).

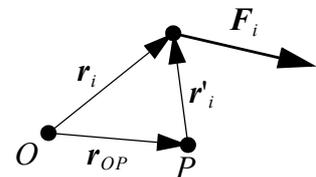
☞ *Falls Kräftepaare zu einer Kräftegruppe gehören, so liefern sie einen Beitrag zum resultierenden Moment (2.2), nicht aber zur Resultierenden (2.1).*

Wir haben gesehen, dass im Rahmen der statischen Äquivalenz von Kräftegruppen nur die Resultierende und das resultierende Moment eine Rolle spielen. Also charakterisieren diese beiden Vektoren die Kräftegruppe. Das Paar $\{\mathbf{R}, \mathbf{M}_O\}$ heisst die **Dyname** der Kräftegruppe (bezüglich des Punktes O). Man kann sich die Dyname auch realisiert denken durch eine in O angreifende Einzelkraft \mathbf{R} und ein Kräftepaar \mathbf{M}_O . Die Berechnung der Dyname einer Kräftegruppe nennt man auch **Reduktion** der Kräftegruppe.



☞ *Der Begriff und die Berechnung der Dyname einer Kräftegruppe hängt nicht davon ab, an welchem physikalischen Objekt die Kräfte angreifen. Es kann sich um einen starren Körper oder um ein beliebiges deformierbares System handeln. Auch für ein kompliziertes System erhalten wir in der Statik und der Dynamik mit Hilfe der Dyname nützliche Gleichungen. Diese beschreiben Teilaspekte (z.B. der Bewegung), erfassen aber nicht alles.*

Nun drängt sich natürlich sofort die Frage auf, wie sich die Dyname bei einem Wechsel des Bezugspunktes transformiert. Die Resultierende



$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i$$

ist unabhängig vom Bezugspunkt.

Das Moment bezüglich O berechnet sich folgendermassen aus demjenigen bezüglich P :

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_{OP} + \mathbf{r}'_i) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r}_{OP} \times \mathbf{R} + \mathbf{M}_P.$$

Daraus ergibt sich die wichtige Transformationsregel:

$$\boxed{\mathbf{M}_P = \mathbf{M}_O + \mathbf{r}_{PO} \times \mathbf{R}}. \tag{2.6}$$

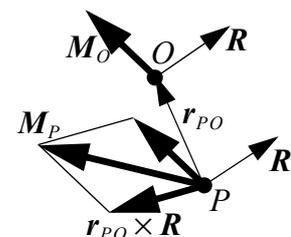
Beachten Sie die Analogie zur Formel (1.16) aus der Kinematik:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OP} = \mathbf{v}_O + \mathbf{r}_{PO} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Die Geschwindigkeit entspricht dem Moment, die Rotationsgeschwindigkeit der Resultierenden. Man kann sich die Formeln leicht merken, wenn man vom richtigen Punkt ausgeht:

Um die Geschwindigkeit des Punktes P zu berechnen, «setzt» man sich in den Punkt O , nimmt die Geschwindigkeit von O und addiert dazu den Anteil $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OP}$ der Rotation.

Für die Berechnung des Moments \mathbf{M}_P bezüglich P denkt man sich besser in den Punkt P , nimmt das Moment bezüglich O und addiert «das Moment der Resultierenden in O » bezüglich P ($\mathbf{r}_{PO} \times \mathbf{R}$).



Wie in der Kinematik können wir auch hier nach den **Invarianten der Dyname** fragen. Offensichtlich ist die Resultierende selbst eine Invariante. Aus der Analogie zur Kinematik vermu-

ten wir, dass auch das Skalarprodukt aus der Resultierenden und dem Moment invariant sein könnte, was auch sofort durch die Formel (2.6) bestätigt wird. Wir haben also wieder eine vektorielle und eine skalare Invariante:

$$I_1 = \mathbf{R},$$

$$I_2 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O.$$

Der allgemeinste Fall einer Dyname im Raum ist eine **Schraube**, bei der die Resultierende und das Moment parallel sind. Natürlich gilt dies nur für eine spezielle Achse, die **Schraubenachse** oder **Zentralachse**, die man i.A. zuerst finden muss. Der Name *Schraube* liefert auch gleich ein anschauliches Beispiel für die Dyname und die Schraubenachse.

Mit den Invarianten können wir auch Dynamen klassifizieren:

Satz:

Eine Kräftegruppe ist statisch äquivalent zu

- einem *Nullsystem*, falls $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ sind,
- einem *Moment* (Kräftepaar), falls $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{M}_O \neq \mathbf{0}$ sind,
- einer *Einzelkraft*, falls $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ und $I_2 = 0$ sind,
- einer *Schraube*, falls $I_2 \neq 0$ ist.

Beweis:

Genau gleich wie bei der Kinemate, siehe Seite 20. ■

Beispiel: Ebene Kräftegruppe

Wir betrachten die skizzierte, aus den drei Kräften vom Betrag F bestehende Kräftegruppe.

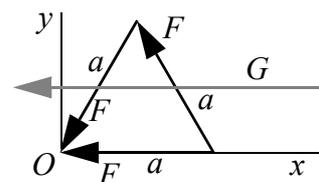
Falls alle Kräfte in einer Ebene liegen, so ist die Resultierende auch in dieser Ebene. Da auch die Angriffspunkte in der Ebene sind, so müssen die Momente senkrecht dazu stehen. Das bedeutet $I_2 = 0$. Aus dem obigen Satz folgt, dass die Kräftegruppe zu einer Einzelkraft oder zu einem Moment statisch äquivalent sein muss.

Für die aus den drei Kräften von Betrage F bestehende Gruppe ist

$$\mathbf{R} = (-2F, 0),$$

$$M_O = \frac{\sqrt{3}}{2} aF.$$

Die Kräftegruppe ist also statisch äquivalent zur Einzelkraft G vom Betrag $2F$, im Abstand $\frac{\sqrt{3}}{4} a$ von der x -Achse.



Beispiel: Moment

Die skizzierte Kräftegruppe ist statisch äquivalent zu einem Kräftepaar:

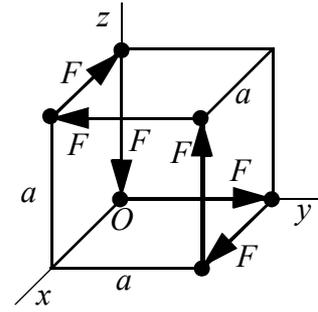
Für die Resultierende erhalten wir

$$\mathbf{R} = \mathbf{0},$$

für das Moment bezüglich O

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M} = (2aF, -2aF, -2aF).$$

Gemäss dem obigen Satz muss also ein Kräftepaar vorliegen.

**Beispiel: Kraftkreuz**

In diesem Beispiel berechnen sich Resultierende und Moment zu

$$\mathbf{R} = (0, 0, \sqrt{2}F),$$

$$\mathbf{M}_O = \left(\frac{aF}{\sqrt{2}}, -\frac{aF}{\sqrt{2}}, -\frac{aF}{\sqrt{2}} \right).$$

Da

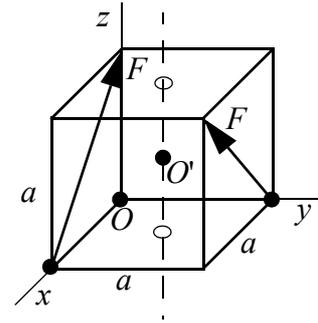
$$I_2 = -aF^2$$

für nicht verschwindende a und F auch nicht verschwindet, so handelt es sich um eine Schraube.

Auf Grund der Geometrie ist es naheliegend, im Mittelpunkt O' des Würfels nach der Schraubennachse zu suchen. Tatsächlich haben wir

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O - \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right) \times \mathbf{R} = \left(0, 0, -\frac{aF}{\sqrt{2}} \right) \parallel \mathbf{R}.$$

Die Zentralachse geht also wirklich durch O' und ist parallel zur z -Achse.

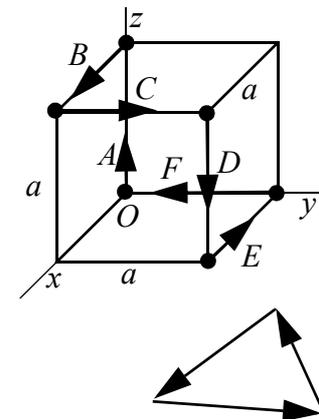
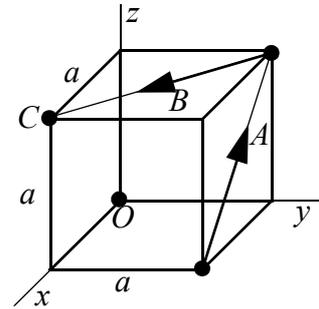
**Kontrollfragen**

1. Wie ist die Resultierende einer Kräftegruppe definiert?
2. Wie ist das resultierende Moment einer Kräftegruppe definiert?
3. Wie ist die statische Äquivalenz zweier Kräftegruppen definiert?
4. Wann sind zwei aus je nur einer Kraft bestehende Kräftegruppen statisch äquivalent?
5. Was ist ein linienflüchtiger Vektor?
6. Was ist die Dynamie?
7. Welche Grössen der Dynamie sind vom Bezugspunkt abhängig?
8. Welches sind die Invarianten der Dynamie?
9. Unter welcher Bedingung lässt sich eine Kräftegruppe auf eine Einzelkraft reduzieren?
10. Unter welcher Bedingung lässt sich eine Kräftegruppe auf ein Moment reduzieren?
11. Was ist eine Schraube?
12. Unter welcher Bedingung ist das resultierende Moment einer Kräftegruppe vom Bezugspunkt unabhängig?
13. Wie berechnet sich die Leistung einer Kräftegruppe?
14. Unter welcher Bedingung an die beiden Leistungen sind zwei Kräftegruppen statisch äquivalent?
15. Unter welcher Bedingung an ihre Leistung ist eine Kräftegruppe im Gleichgewicht?

16. Welchen Betrag hat das Moment eines Kräftepaars?
17. Welche Richtung hat das Moment eines Kräftepaars?

Übungen

1. Wir betrachten ein Nullsystem aus drei nicht verschwindenden Kräften. Zeigen Sie, dass sich die drei Wirkungslinien in einem Punkt schneiden oder parallel sind!
2. Die Kräftegruppe $\{A, B\}$ besteht aus den skizzierten Kräften mit Komponenten A, B . Reduzieren Sie die Kräftegruppe auf eine Dynamie in O !
3. Reduzieren Sie die Kräftegruppe $\{A, B\}$ auf eine Dynamie in C !
4. Bestimmen Sie die sechs am Würfel skizzierten Kräfte so, dass ihre Reduktion auf O einen Momentenvektor mit Betrag M in Richtung der z -Achse ergibt!
5. Eine ebene Kräftegruppe habe die Eigenschaft, dass (in geeigneten Einheiten) die drei Kraftvektoren ein Dreieck bilden. Reduzieren Sie die Kräftegruppe auf eine Dynamie! Vergleichen Sie das Resultat mit der «Fläche» des Dreiecks!



2.2 Kräftemittelpunkt und Massenmittelpunkt

Lernziele

- Sie können den Kräftemittelpunkt einer parallelen Kräftegruppe bestimmen.
- Sie kennen den Begriff des Dipolmoments einer parallelen Kräftegruppe mit verschwindender Resultierenden.
- Sie wissen, wie man den Schwerpunkt homogener Körper durch Integration berechnet.
- Sie können den Schwerpunkt zusammengesetzter Körper ohne Integration ermitteln.

In der Natur treten oft **parallele Kräftegruppen** auf, also Kräftegruppen, die aus parallelen Kräften bestehen. Diese lassen sich besonders einfach reduzieren.

Auch parallele Kräftegruppen sind eine vereinfachende Modellierung der Natur; mathematisch genau gibt es sie nirgends. Die Zulässigkeit der Vereinfachung hängt von der gewünschten Genauigkeit der Rechnungen ab. Gewichtskräfte lassen sich beispielsweise oft als parallele Kräftegruppen ansehen, obwohl sie global betrachtet bei weitem nicht parallel sind.

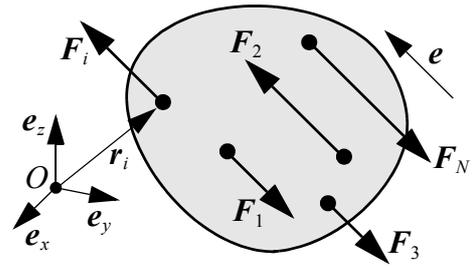
Mit einem Einheitsvektor \mathbf{e} , der in die gemeinsame Krafrichtung zeigt, schreiben wir

$$\mathbf{F}_i = F_i \mathbf{e}, \text{ für } i = 1, \dots, N.$$

Damit wird die Resultierende

$$\mathbf{R} = R \mathbf{e},$$

$$R = \sum_{i=1}^N F_i$$



und das resultierende Moment bez. O

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^N F_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{e}. \tag{2.7}$$

Weil (für alle i) $R \mathbf{e} \perp \mathbf{r}_i \times \mathbf{e}$ ist, folgt automatisch

$$I_2 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = 0.$$

Also lässt sich die Gruppe auf ein Moment oder eine Einzelkraft reduzieren.

1. Fall: $R = 0$

Dieser Fall hat in der Elektrostatik und -dynamik wichtige Analogien. Die Kräftegruppe kann hier auf ein Moment \mathbf{M} reduziert werden, welches gemäss (2.6) unabhängig vom Bezugspunkt ist – deshalb lassen wir den Index weg. Wir definieren das **Dipolmoment der Kräftegruppe** als

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^N F_i \mathbf{r}_i$$

und erhalten dann aus (2.7)

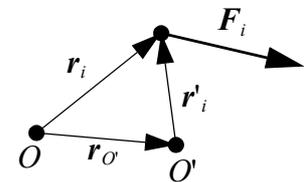
$$\mathbf{M} = \mathbf{N} \times \mathbf{e}.$$

Auch \mathbf{N} ist *unabhängig vom Bezugspunkt*. Wenn wir nämlich die Ortsvektoren \mathbf{r}_i in einem anderen Bezugspunkt O' ansetzen,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}'_i,$$

und

$$\mathbf{N}' = \sum_{i=1}^N F_i \mathbf{r}'_i$$



schreiben, so ergibt sich, wegen $R = 0$:

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^N F_i \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N F_i (\mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}'_i) = R \mathbf{r}_{O'} + \sum_{i=1}^N F_i \mathbf{r}'_i = \sum_{i=1}^N F_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{N}'.$$

Wir betrachten nun ein homogenes elektrisches Feld $\mathbf{E} = E\mathbf{e}$. Darin befinden sich in den Punkten \mathbf{r}_i die Ladungen q_i . Die auf die Ladungen wirkenden Kräfte sind also

$$\mathbf{F}_i = q_i \mathbf{E}.$$

Das **Dipolmoment der Punktladungsgruppe** ist definiert als

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i. \quad (2.8)$$

Hier ist die Masseinheit C m, im Gegensatz zum Dipolmoment einer Kräftegruppe mit der Einheit N m. Der Zusammenhang zwischen den beiden Dipolmomenten ist gegeben durch

$$\mathbf{N} = E\mathbf{P},$$

und das auf die Ladungsgruppe wirkende Moment wird

$$\mathbf{M} = \mathbf{N} \times \mathbf{e} = E\mathbf{P} \times \mathbf{e} = \mathbf{P} \times \mathbf{E}.$$

Die Bedingung, dass die Resultierende verschwindet, bedeutet im elektrischen Fall, dass die Gesamtladung null ist:

$$Q = \sum_{i=1}^N q_i = 0.$$

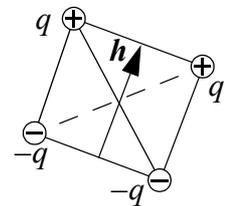
Diese Situation tritt z.B. bei Molekülen auf.

Beispiel: Ladungen im Tetraeder

In den Eckpunkten eines Tetraeders sitzen vier Ladungen vom Betrag q ; zwei sind positiv, zwei negativ. Wir suchen das elektrische Dipolmoment.

Die beiden gleichartigen Ladungen können je in eine Ladung $\pm 2q$ in der Mitte ihrer Verbindungskante zusammengefasst werden. Mit dem skizzierten Verbindungsvektor der beiden Kantenmittelpunkte wird (2.8) zu

$$\mathbf{P} = 2qh.$$



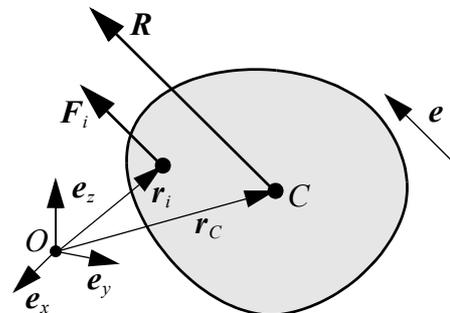
2. Fall: $R \neq 0$

In diesem Fall ist die parallele Kräftegruppe statisch äquivalent zu einer *Einzelkraft*. Wir wollen den Angriffspunkt C (bzw. die Wirkungslinie) dieser Einzelkraft bestimmen.

Wir suchen also den durch \mathbf{r}_C bestimmten Punkt C mit

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{0}.$$

Wenn wir das Moment auf den Ursprung O umrechnen, so erhalten wir



$$\mathbf{0} = \mathbf{M}_O - \mathbf{r}_C \times \mathbf{R} = \left(\sum_{i=1}^N F_i \mathbf{r}_i - R \mathbf{r}_C \right) \times \mathbf{e}.$$

Diese Gleichung legt r_C noch nicht eindeutig fest.

Wir verlangen zusätzlich, dass M_C für beliebige e verschwindet. Diese Bedingung kann man sich so veranschaulichen, dass der Körper beliebig um den gesuchten Punkt gedreht werden kann, ohne dass sich die Wirkung der Kräfte (im Rahmen der statischen Äquivalenz) ändert. Dann folgt sofort

$$\boxed{r_C = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^N F_i r_i \text{ mit } R = \sum_{i=1}^N F_i} \quad (2.9)$$

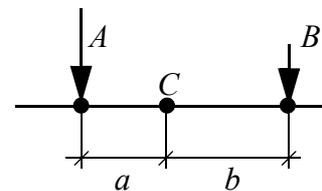
Man nennt C den **Kräftemittelpunkt** der Kräftegruppe.

Beispiel: Zwei parallele Kräfte

Hier ist der Kräftemittelpunkt C durch die Gleichung

$$aA = bB$$

bestimmt. Er liegt also genau dort, wo man eine Balkenwaage auflegen muss, damit sie im Gleichgewicht ist.



Ein wichtiger Spezialfall ist ein Körper im homogenen *Schwerefeld* der Erde. Hier ist das infinitesimale Kraftelement dG gegeben durch

$$dG = g dm,$$

wo g die vertikale Erdbeschleunigung vom Betrag $g \cong 9,81 \text{ m s}^{-2}$ bezeichnet.

Der Kräftemittelpunkt der Gewichtskräfte heisst auch **Schwerpunkt** oder **Massenmittelpunkt**. Die Summe (2.9) muss jetzt durch ein Integral über den betrachteten materiellen Bereich B ersetzt werden. So ergibt sich

$$\boxed{r_C = \frac{1}{m} \iiint_B r dm}, \quad (2.10)$$

mit der Gesamtmasse m des materiellen Bereichs B :

$$m = \iiint_B dm.$$

Für einen **homogenen Körper** im Bereich K mit (konstanter) Dichte γ betrachten wir ein Volumenelement dV . Die Masse dm des Volumenelements berechnet sich zu

$$dm = \gamma dV.$$

Daraus ergibt sich, mit dem Gesamtvolumen V , das Resultat

$$r_C = \frac{1}{V} \iiint_K r dV. \quad (2.11)$$

Diese Formel ist identisch mit derjenigen für den geometrischen Schwerpunkt.

Für eine *homogen* mit Masse belegte Fläche K_a (Gesamtfläche A , Flächenelement dA) oder Kurve K_l (Länge L , Längenelement ds) gelten analoge Formeln mit Flächen- bzw. Kurvenintegralen:

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{A} \iint_{K_a} \mathbf{r} dA, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{L} \int_{K_l} \mathbf{r} ds. \quad (2.13)$$

Beispiel: Halbkreisfläche

Wir berechnen den Schwerpunkt einer homogen belegten Halbkreisfläche. Die erste Formel von (2.12) ist dafür massgeschneidert. Für die Integration verwenden wir mit Vorteil Polarkoordinaten. Das Flächenelement dA ergibt sich zu

$$dA = r dr d\varphi.$$

Die kartesischen Komponenten des Ortsvektor \mathbf{r} sind

$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi.$$

Als Gesamtfläche A haben wir

$$A = \frac{\pi R^2}{2}.$$

Daraus ergibt sich

$$x_C = \frac{1}{A} \int_0^\pi \int_0^R r \cos \varphi r dr d\varphi = 0,$$

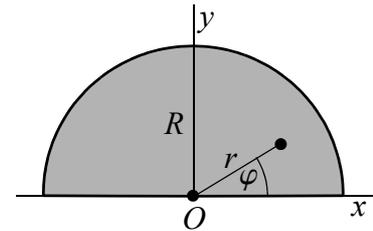
$$y_C = \frac{1}{A} \int_0^\pi \int_0^R r \sin \varphi r dr d\varphi = \frac{1}{A} \frac{R^3}{3} 2 = \frac{4R}{3\pi}.$$

Oft helfen *Symmetrien* bei der Ermittlung des Schwerpunktes (wie im obigen Beispiel die Symmetrie bezüglich der y -Achse).

Falls ein Körper aus Teilen mit einfach zu bestimmenden Schwerpunkten zusammengesetzt ist, so lässt sich aus (2.9) folgende Formel für die auf die Schwerpunkte der Teile reduzierten Gewichtskräfte ableiten:

$$G \mathbf{r}_C = \sum_i G_i \mathbf{r}_i. \quad (2.14)$$

Darin bezeichnet G das Gesamtgewicht und G_i das Gewicht des i -ten Körpers.



Beispiel: Durch Kreisbogen begrenzte Fläche

Für die Berechnung des Schwerpunkts der skizzierten Fläche ist die direkte Integration etwas mühsam. Wir betrachten deshalb zuerst den Viertelkreis und «subtrahieren» davon den kleineren Halbkreis. Analog zum obigen Beispiel erhalten wir für den Schwerpunkt eines Viertelkreises mit Radius $2R$ die Koordinaten

$$x = y = \frac{8R}{3\pi}$$

Aus (2.14) erhalten wir nun die Gleichungen

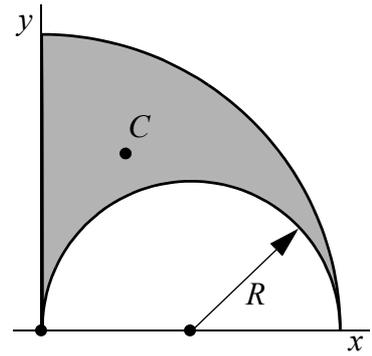
$$\frac{4\pi R^2 8R}{4 \cdot 3\pi} = \frac{\pi R^2}{2} R + \frac{\pi R^2}{2} x_C,$$

$$\frac{4\pi R^2 8R}{4 \cdot 3\pi} = \frac{\pi R^2 4R}{2 \cdot 3\pi} + \frac{\pi R^2}{2} y_C$$

und damit

$$x_C = \left(\frac{16}{3\pi} - 1\right)R,$$

$$y_C = \frac{4}{\pi}R.$$

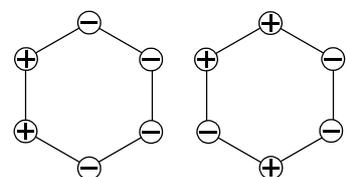
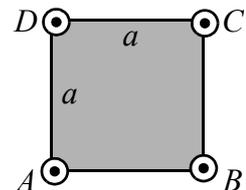


Kontrollfragen

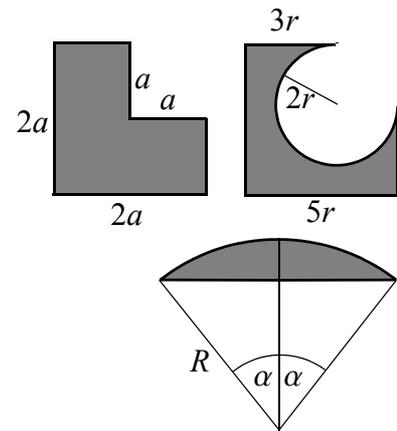
1. Was ist eine parallele Kräftegruppe?
2. Worauf lässt sich eine parallele Kräftegruppe reduzieren?
3. Unter welcher Bedingung lässt sich eine parallele Kräftegruppe auf eine Einzelkraft reduzieren?
4. Was ist das Dipolmoment einer Kräftegruppe?
5. Was ist das Dipolmoment einer Ladungsgruppe?
6. Was ist der Kräftemittelpunkt?
7. Wie ist der Schwerpunkt definiert?
8. Liegt der Schwerpunkt immer im betrachteten Körper?
9. Was lässt sich über die Lage des Schwerpunktes eines symmetrischen Körpers aussagen?
10. Wo befindet sich der Schwerpunkt einer Kugel?
11. Wo befindet sich der Schwerpunkt eines Dreiecks?

Übungen

1. In den Eckpunkten des skizzierten Quadrates greifen vier Kräfte an. Welcher Bedingung müssen sie genügen, damit der Kräftemittelpunkt mit dem geometrischen Mittelpunkt des Quadrates zusammenfallen soll?
2. In den Eckpunkten eines regulären Sechsecks befinden sich die skizzierten positiven oder negativen Ladungen vom Betrag q , an welchen in einem homogenen elektrischen Feld gemäss $F = qE$ Kräfte angreifen. Bestimmen Sie im einen skizzierten Fall den Kräftemittelpunkt (bzw. «Ladungsmittelpunkt») und im anderen Fall das elektrische Dipolmoment.



3. Bestimmen Sie ohne Integration die Schwerpunkte der skizzierten Flächen!



4. Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Segmentes mit Öffnungswinkel 2α !

Überprüfen Sie die Spezialfälle $\alpha = 180^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 0^\circ$!

2.3 Prinzip der virtuellen Leistungen

Lernziele

- Sie können sich unter der Ruhelage eines Systems etwas vorstellen.
- Sie kennen das Prinzip der virtuellen Leistungen als Grundprinzip der Mechanik. Sie haben verstanden, wie Sie daraus Kräfte bestimmen können.
- Es ist Ihnen bewusst, dass für Ruhe eventuell weitere Bedingungen erfüllt sein müssen, welche zum Teil später behandelt werden (Vorzeichen und Angriffspunkt der Normalkraft, Haftreibungsgesetz, Festigkeit etc.)

Wir entwickeln die Mechanik im Wesentlichen aus nur zwei Prinzipien. Das eine, nämlich das *Reaktionsprinzip*, haben wir in Abschnitt 1.5 schon kennengelernt. Das andere, das *Prinzip der virtuellen Leistungen*, werden wir in diesem Abschnitt einführen. Beide Prinzipien lassen nicht durch mathematische Überlegungen ableiten (ausser aus äquivalenten Prinzipien). Sie entstammen der Beobachtung der Natur und der Verarbeitung dieser Beobachtungen in eine möglichst einfache und allgemeingültige Form. Die Prinzipien können nur durch ihnen widersprechende Experimente umgeworfen werden. Für die klassische Mechanik bewähren sie sich aber ausserordentlich gut. Ihre Grenzen liegen erst am Rande der alltäglichen Erfahrung, nämlich im Wirkungsbereich der Relativitätstheorie (sehr grosse Geschwindigkeiten oder sehr grosse Massen bzw. Energien) und der Quantenmechanik (sehr kleine Ausdehnungen, Zeiten, Energien etc.).

Wir führen vorerst den Begriff des *virtuellen Bewegungszustandes* ein. Darunter verstehen wir irgendeinen gedachten Bewegungszustand, der keinen Bezug zu den wirklich möglichen Bewegungszuständen haben muss. Er kann also z.B. auch Bindungen (Einschränkungen der Bewegungsmöglichkeiten) verletzen. Um virtuelle Bewegungszustände von wirklichen zu unterscheiden, bezeichnen wir sie mit einer Tilde: $\{\tilde{\mathbf{v}}\}$ ist ein beliebiger virtueller Bewegungszustand, $\{\tilde{\mathbf{v}}_O, \tilde{\omega}\}$ ein virtueller Starrkörper-Bewegungszustand.

Ein *zulässiger virtueller Bewegungszustand* ist ein virtueller Bewegungszustand, der keine Bindungen verletzt. Er muss sich also z.B. an Einschränkungen der Bewegungsmöglichkeiten durch Gelenke und andere Lagerungen halten, ansonsten ist die Geschwindigkeit und die Rotationsgeschwindigkeit völlig beliebig und unabhängig von den angreifenden Kräften.

Ein *unzulässiger virtueller Bewegungszustand* ist ein virtueller Bewegungszustand, der mindestens eine Bindung verletzt.

Für virtuelle Bewegungszustände können wir die Leistung der angreifenden Kräfte berechnen. Um diese **virtuellen Leistungen** von den wirklichen zu unterscheiden (bei denen die Geschwindigkeiten von den Kräften abhängen), bezeichnen wir sie ebenfalls mit einer Tilde: $\tilde{\mathcal{P}}$.

Wie in Abschnitt 1.5 eingeführt, können wir zwischen inneren und äusseren Kräften an einem System unterscheiden. Entsprechend ergeben sich auch virtuelle Leistungen der inneren und der äusseren Kräfte, die wir mit $\tilde{\mathcal{P}}^{(i)}$ bzw. $\tilde{\mathcal{P}}^{(a)}$ bezeichnen.

Man sagt, ein System befinde sich **in Ruhe**, wenn alle Geschwindigkeiten null sind. Eine **Ruhelage** eines System ist eine Lage, in der das System in Ruhe bleibt, wenn es zu einem beliebigen Zeitpunkt in Ruhe war.

Mit diesen Begriffen formulieren wir das **Prinzip der virtuellen Leistungen**:

Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL):

Ein System befindet sich genau dann in einer Ruhelage, wenn die virtuelle Gesamtleistung der inneren und äusseren Kräfte bei jedem virtuellen Bewegungszustand verschwindet (und die Eigenschaften des Systems und seiner Lagerung diese Kräfte zulassen).

Formal schreiben wir das Prinzip folgendermassen:

$$\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\mathcal{P}}^{(i)} + \tilde{\mathcal{P}}^{(a)} = 0, \forall \{\tilde{\mathbf{v}}\}. \quad (2.15)$$

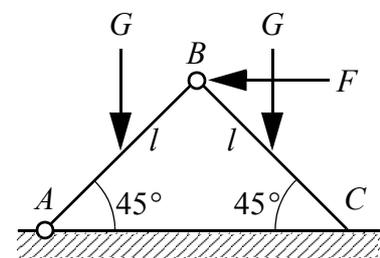
Jakob Bernoulli (1654-1705) hat dieses Prinzip schon implizit benutzt, um das Pendel zu behandeln. Die erste explizite Formulierung stammt von *Joseph-Louis de Lagrange* (1736-1813).

Das PdvL stellt nicht sicher, dass das vorliegende System die für Ruhe nötigen Kräfte tatsächlich auch aufnehmen bzw. aufbringen kann. Deshalb muss nachträglich kontrolliert werden, ob z.B. Normalkräfte in einseitigen Bindungen (oder Fadenkräfte) in die richtige Richtung zeigen, Haftreibungsgesetze erfüllt sind oder die inneren Kräfte mit der Festigkeit der Materialien verträglich sind.

Beispiel: Kniegelenk

Ein Balken (Länge l , Gewicht G) ist in A gelenkig gelagert und in B mit einem gleichen Balken gelenkig verbunden. Letzterer ist in C aufgelegt. Alle Bindungen sind reibungsfrei, das System eben.

Gesucht ist der Wert für die horizontale Kraft F in B , so dass das System in Ruhe ist. Die Kräfte im Gelenk und in der Auflage interessieren uns im Moment nicht.



Hauptsatz der Statik:

In einer Ruhelage eines Systems müssen alle (äusseren) Kräfte im Gleichgewicht sein:

$$\mathbf{R} = \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{M}_O = \mathbf{0}. \quad (2.16)$$

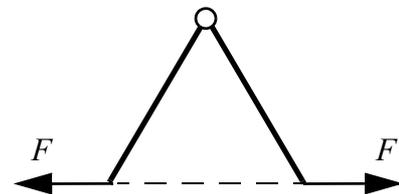
Beweis:

Wir betrachten virtuelle Starrkörperbewegungen mit Kinematen der Form $\{\tilde{\mathbf{v}}_O, \tilde{\boldsymbol{\omega}}\}$. Aus dem PdvL (2.15) schliessen wir, dass in einer Ruhelage

$$\tilde{\mathcal{P}} = \mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_O + \mathbf{M}_O \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}} = 0, \forall \{\tilde{\mathbf{v}}_O, \tilde{\boldsymbol{\omega}}\}$$

gelten muss. Dabei können $\tilde{\mathbf{v}}_O$ und $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ unabhängig voneinander frei gewählt werden. Wenn jeweils nur eine Komponente verschieden von null gesetzt wird, so kann auf das Verschwinden der entsprechenden Komponente von \mathbf{R} und \mathbf{M}_O geschlossen werden. ■

☞ *Achtung:* Dieser Satz ist für Systeme (und deformierbare Körper) nur eine *notwendige* Bedingung, d.h.: die Bedingung kann erfüllt sein, ohne dass das System in Ruhe sein muss. Die skizzierten Kräfte am «Zirkel» sind im Gleichgewicht, aber der Mechanismus wird sich bewegen.



Für einen *starrten Körper* gilt auch die Umkehrung des Hauptsatzes der Statik. Der Beweis dieses Satzes mit Hilfe des PdvL ist aber sehr aufwendig. Wir behelfen uns deshalb mit einem Zusatzpostulat zum PdvL, welches einen einfachen Beweis des Satzes erlaubt.

Zusatzpostulat zum Prinzip der virtuellen Leistungen:

Ein *starrer Körper* befindet sich genau dann in einer Ruhelage, wenn die Gesamtleistung der inneren und äusseren Kräfte bei jedem virtuellen *Starrkörperbewegungszustand* verschwindet.

Satz:

Das Gleichgewicht der äusseren Kräfte ($\mathbf{R} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$) ist notwendig und *hinreichend* für eine Ruhelage eines *starrten Körpers* (sofern die Kräfte im System möglich sind).

Beweis:

- i) Die Notwendigkeit folgt aus dem Hauptsatz.
- ii) Um auch die Umkehrung zu beweisen, nehmen wir an, dass für die äusseren Kräfte $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ gelte. Gemäss Zusatzpostulat müssen wir nachweisen, dass die virtuelle Leistung aller inneren und äusseren Kräfte bei jedem virtuellen Starrkörperbewegungszustand, z.B. beschrieben durch die Kinemate $\{\tilde{\mathbf{v}}_O, \tilde{\boldsymbol{\omega}}\}$, verschwindet. (Das Postulat erspart uns den Nachweis, dass die virtuelle Leistung für jeden beliebigen virtuellen Bewegungszustand verschwindet.)

Die inneren Kräfte ergeben beim virtuellen Starrkörperbewegungszustand keinen Beitrag zur Leistung, da ihre Reactio ebenfalls am Körper (und auf derselben Wirkungslinie) angreift. Der virtuelle Starrkörperbewegungszustand liefert aber auch keine Leistung der äusseren Kräfte, da gemäss der Definition der statischen Äquivalenz die Leistung der ursprünglichen Kräftegruppe und der auf die Dynamik reduzierten Kräftegruppe für Starrkörperbewegungen gleich ist:

$$\tilde{\mathcal{P}} = \mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_O + \mathbf{M}_O \cdot \tilde{\omega} = 0.$$

Weil gemäss Voraussetzung $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ ist, wird also die virtuelle Leistung für beliebige $\tilde{\mathbf{v}}$ und $\tilde{\omega}$ verschwinden. ■

Die drei Gleichungen $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ nennt man **Komponentenbedingungen** («KB»), die drei Gleichungen $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ **Momentenbedingungen** («MB»), alle Gleichungen zusammen **Gleichgewichtsbedingungen**.

Wie schon beim PdvL bemerkt, müssen die für das Gleichgewicht nötigen Kräfte auch *möglich* sein. Z.B. muss das Material genügend stark sein, um bei diesen Kräften nicht zu versagen. Sonst liegt keine Ruhelage vor. Dazu müssen die Bindungskräfte und die inneren Kräfte eventuell **Zusatzbedingungen** erfüllen. Diese stellen sicher, dass Reibungsbedingungen erfüllt sind, Normal- und Seilkräfte die richtige Richtung haben, Materialien genügend belastbar sind etc.

Beispiel: Dreieckplatte

Eine homogene Dreieckplatte vom Gewicht G ist gemäss der Skizze reibungsfrei gelenkig gelagert und an einem Faden befestigt. Zusätzlich greift noch die Kraft P an.

Gesucht sind die Gelenk- und Fadenkräfte sowie eine Bedingung für P , damit der Faden gespannt bleibt.

Im Gelenk greift eine Kraft in beliebiger Richtung an. Deshalb müssen wir zwei unbekannte Komponenten einführen (siehe auch Abschnitt 2.5).

Der Faden kann nur eine Kraft in Fadenrichtung ausüben. Die Fadenkraft kann also durch eine Komponente (in Fadenrichtung) modelliert werden.

Wir berechnen die Resultierende und das Moment bezüglich O :

Resultierende in x -Richtung, $KB(x) : \frac{P}{2} + A - S = 0 ;$

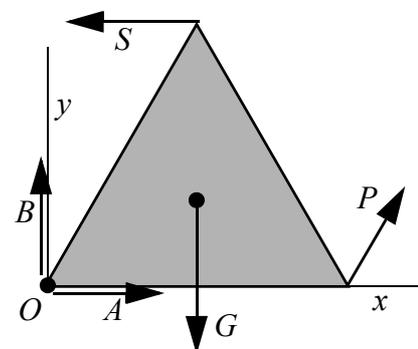
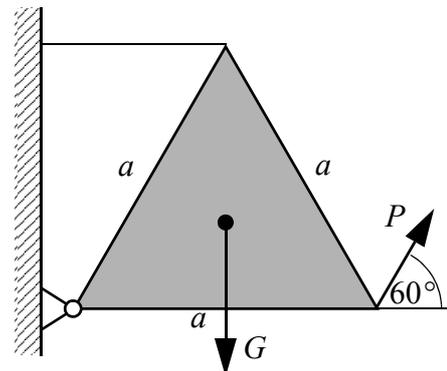
Resultierende in y -Richtung, $KB(y) : B - G + \frac{\sqrt{3}}{2}P = 0 ;$

Resultierendes Moment bezüglich O in z -Richtung, $MB(O, z) :$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}aP - \frac{a}{2}G + \frac{\sqrt{3}}{2}aS = 0.$$

Damit erhalten wir die Resultate

$$S = \frac{\sqrt{3}}{3}G - P,$$



$$A = \frac{\sqrt{3}}{3}G - \frac{3}{2}P,$$

$$B = G - \frac{\sqrt{3}}{2}P.$$

Der Faden ist genau dann gespannt, wenn die Fadenkraft $S > 0$ ist. Daraus ergibt sich die Ungleichung

$$P < \frac{\sqrt{3}}{3}G.$$

Beispiel: Horizontale Platte an drei Fäden

Eine homogene Platte vom Gewicht G ist gemäss Skizze horizontal liegend an drei Fäden aufgehängt. Zusätzlich zum Gewicht greift das skizzierte Moment M an.

Gesucht sind die Fadenkräfte sowie die Bedingung dafür, dass die Fäden gespannt bleiben.

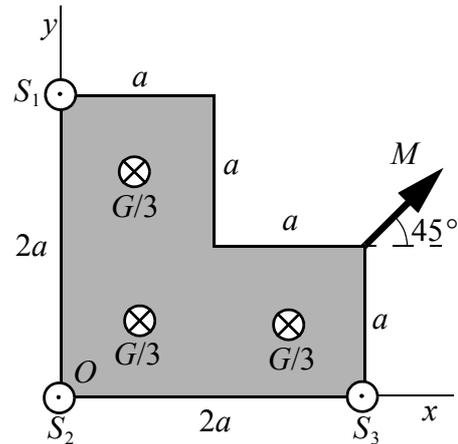
Wir sparen uns die Berechnung des Schwerpunktes, indem wir das Gewicht auf die drei Quadrate verteilen.

So erhalten wir die Komponentenbedingungen

$$KB(x): 0 = 0,$$

$$KB(y): 0 = 0,$$

$$KB(z): S_1 + S_2 + S_3 - G = 0$$



und die Momentenbedingungen bezüglich der Koordinatenachsen

$$MB(O, x): 2aS_1 - \frac{3aG}{2} - 2\frac{aG}{2} + \frac{M}{\sqrt{2}} = 0,$$

$$MB(O, y): -2aS_3 + \frac{3aG}{2} + 2\frac{aG}{2} + \frac{M}{\sqrt{2}} = 0,$$

$$MB(O, z): 0 = 0.$$

Daraus erhält man die Resultate

$$S_1 = \frac{5}{12}G - \frac{\sqrt{2}M}{4a},$$

$$S_3 = \frac{5}{12}G + \frac{\sqrt{2}M}{4a},$$

$$S_2 = \frac{1}{6}G.$$

Alle Fadenkräfte müssen positiv sein. Die Bedingungen an S_1 und S_3 können zusammengefasst werden zu

$$|M| < \frac{5\sqrt{2}}{6}aG.$$

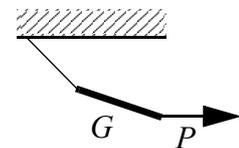
Kontrollfragen

1. Wie lautet der Hauptsatz der Statik?

2. Welche Kräfte müssen in den Gleichgewichtsbedingungen am starren Körper berücksichtigt werden?
3. Was sind die Komponentenbedingungen, was die Momentenbedingungen?
4. Wie gross ist der Freiheitsgrad eines starren Körpers im Raum?
5. Wie viele Gleichgewichtsbedingungen können wir am starren Körper im Raum formulieren?
6. Wie gross ist der Freiheitsgrad des starren Körpers in der Ebene?
7. Wie viele wesentliche Gleichgewichtsbedingungen können wir an einem starren Körper in der Ebene formulieren?
8. Warum sind bei einem starren Körper in der Ebene zwei Momentenbedingungen, aber nur eine Komponentenbedingung trivial?
9. Bilden die äusseren Kräfte am ruhenden starren Körper ein Nullsystem?
10. Ist ein starrer Körper, dessen äussere Kräfte ein Nullsystem bilden, im Gleichgewicht?
11. Ist ein starrer Körper, dessen äussere Kräfte ein Nullsystem bilden, in Ruhe?

Übung

1. Ein homogener Balken vom Gewicht G ist an einem gewichtslosen Faden aufgehängt. Am freien Ende greift eine horizontale Last P an. Balken und Faden haben beide die Länge l und sind in Ruhe. Finden Sie die Fadenkraft und die Neigungswinkel von Balken und Faden in Funktion von P !



2.5 Bindungen

Lernziele

- Sie können zwischen Reibungskräften und anderen Bindungskräften unterscheiden.
- Sie wissen, welche Kräfte und Momente beim Freischneiden einer Bindung eingeführt werden müssen und welche bei einer reibungsfreien Bindung weggelassen werden können.
- Sie kennen die wichtigsten reibungsfreien ebenen Bindungen und können die entsprechenden Bindungskräfte sofort korrekt einführen.
- Sie können sich vorstellen, welche Kräfte und Moment Sie von Hand auf ein System ausüben müssen, falls Sie die Funktion einer Bindung übernehmen wollen.
- Wenn eine räumliche Bindung durch ihre kinematischen Eigenschaften (verhinderte Bewegungsmöglichkeiten) beschrieben ist, können sie die richtigen Kräfte und Moment einführen.
- Sie können kinematisch unbestimmte Systeme identifizieren.
- Sie können statisch unbestimmte Systeme auf zwei Arten identifizieren.

Wir haben schon mehrfach Bindungen auf intuitive Art und Weise benützt. In diesem Abschnitt wollen wir sie etwas systematischer betrachten.

Allgemein versteht man unter einer **Bindung** eine Einschränkung der Bewegungsfreiheit eines Körpers. Gewisse Bewegungen sind möglich, andere sind durch automatisch sich einstellende Kräfte verhindert. Z.B. ist ein Gelenk eine Bindung; es lässt Rotationen zu und verhindert Translationen. Die in der Bindung auftretenden Kräfte bezeichnet man als **Bindungskräfte**, **Zwangskräfte**, **Lagerkräfte** bzw. **-momente** oder (zusammenfassend) auch als **Reaktionen**. (Der Begriff *Reaktion* hat in diesem Zusammenhang nichts mit dem Reaktionsprinzip zu tun – obwohl die Bindungskräfte, wie alle Kräfte, Teile eines Actio-Reactio-Paares sind.)

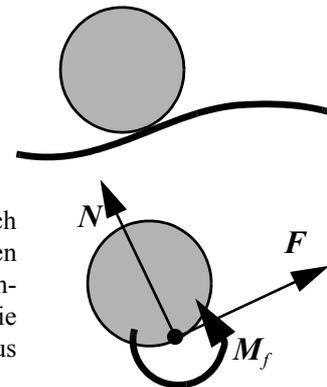
Bindungskräfte nehmen je nach Lage, Belastung oder Bewegung des Systems unterschiedliche Werte an. Sie stehen im Gegensatz zu den **eingepprägten Kräften**, die als bekannt angenommen werden (z.B. Gravitationskräfte oder gegebene Belastungen). Die Bindungskräfte sind unbekannt und müssen aus den Gleichgewichtsbedingungen (oder Bewegungsgleichungen) berechnet werden.

Im realen System sind die Bindungskräfte immer verteilte Kräfte. Wir betrachten hier aber Starrkörpermodelle, wo die Bindung oft in einem Punkt angesiedelt ist (z.B. dem Berührungspunkt eines Rades oder der Position eines Gelenks). Die Bindungskräfte können dann auf ihre Dynamik in diesem Punkt reduziert werden. Sie hat vorerst im Raum sechs skalare Kraft- und Momentkomponenten bzw. in der Ebene drei. Je nach Art der Bindung werden einzelne Komponenten der Dynamik vernachlässigt und null gesetzt. (Genau genommen gilt dies allerdings nur für die von uns betrachteten einfachen, «holonomen» und «skleronomen» Bindungen).

Bewegungen, die durch die Bindung verhindert werden, heißen **unzulässige Bewegungen**. Im Gegensatz dazu stehen die **zulässige Bewegungen**: Sie werden durch die Bindung nicht verhindert.

Beispiel: Rad

Wir betrachten die ebene Bewegung eines rollenden Rades. Im Auflagepunkt haben wir zwei Kraft- und eine Momentkomponente. Eine sinnvolle Richtungswahl für die Kraftkomponenten ist in und senkrecht zur Berührungsebene. Die so konstruierten Komponenten nennt man **Normalkraft N** , **Reibungskraft F** und **Rollwiderstandsmoment (auch: Rollreibungsmoment) M_f** .



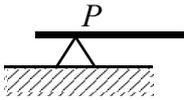
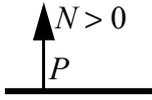
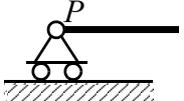
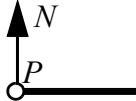
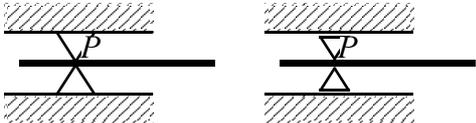
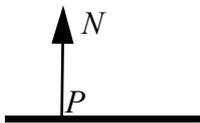
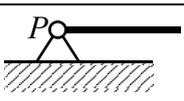
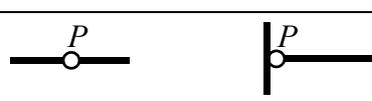
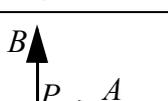
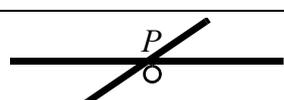
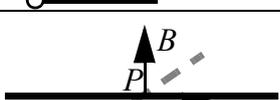
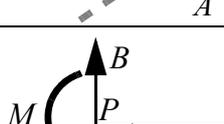
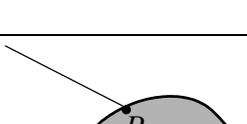
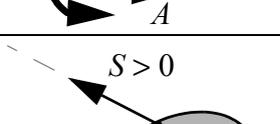
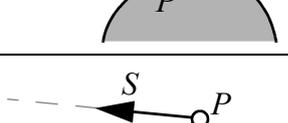
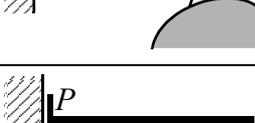
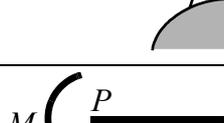
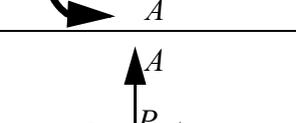
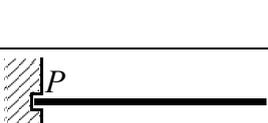
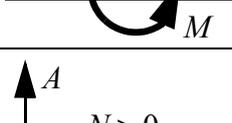
Zulässige Bewegungen sind hier Translationen parallel zur Unterlage und Rotationen um den Berührungspunkt. Eine Translation senkrecht zur Unterlage durch den Boden ist offensichtlich unzulässig. Eine Translation senkrecht weg vom Boden löst die Bindung und verändert damit das System. Deshalb ist diese Bewegung ebenfalls unzulässig. Die betrachtete **einseitige Bindung** hat die Eigenschaft, dass die Normalkraft am Rad in die eingezeichnete Richtung (von der Berührungsebene aus durch den Körper) zeigen muss.

In starren Bindungen können **Reibungsreaktionen** charakterisiert werden als Bindungskräfte (bzw. -momente) parallel zu zulässigen Bewegungen. In **reibungsfrei modellierten Bindungen** werden die Reibungsreaktionen vernachlässigt, weil sie viel kleiner als die anderen Kräfte bzw. Momente sind.

In jeder Bindung muss also vorerst eine vollständige Dynamik eingeführt werden. Falls gewisse zulässige Bewegungen reibungsfrei modelliert werden können, so werden die entsprechenden Kraft- bzw. Momentkomponenten weggelassen.

In der folgenden Tabelle sind die gebräuchlichsten **reibungsfreien** Bindungen in ebenen Systemen skizziert, jeweils mit den Ikonen für die Bindung in P und den entsprechenden Bindungskräften/-momenten am freigeschnittenen Körper.

<p>Auflager (einseitig)</p>		
--	--	--

Auflager (einseitig) <i>Loslager</i>		
Auflager (beidseitig) <i>Loslager</i>		
Auflager (beidseitig) <i>Kurzes Querlager</i> <i>Loslager</i>		
Gelenk <i>Festlager</i>		
Gelenk		
Gelenk (zwei gelenkig verbundene Balken)		
Einspannung		
Faden / Seil		
Pendelstütze (Modellannahme: äussere Kräfte nur in den Gelenken)		
Parallelführung		
Langes Querlager, Schiebehülse		
Längs- und kurzes Querlager		

Ein System heisst *statisch bestimmt*, falls sich die Bindungskräfte und -momente (für beliebige Belastungen) eindeutig aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnen lassen – wenn also gleich viele Unbekannte wie linear unabhängige Gleichungen für die Bindungskräfte und

-momente vorliegen. (In zusammengesetzten Systemen muss dies auch für jedes Teilsystem gelten.)

Falls mehr Bindungen als Gleichungen vorhanden sind, so heisst das System **statisch unbestimmt**. Die Differenz zwischen der Zahl der Unbekannten und der Zahl der linear unabhängigen Gleichungen ist der **Grad** der statischen Unbestimmtheit.

☞ *Statische Bestimmtheit ist eine Eigenschaft des Systems und seiner Lagerung; sie hängt nicht von der vorliegenden Belastung ab.*

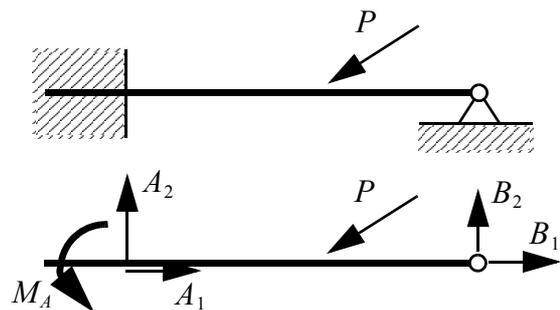
Bei statisch unbestimmten Systemen sind also mehr Bewegungsmöglichkeiten eingeschränkt als für Ruhe nötig ist. Als unerwünschte Nebeneffekte statischer Unbestimmtheit kennt man z.B. das *Klemmen* bei der Montage oder Schäden durch unterschiedliche Dehnungen bei Temperaturveränderung.

☞ *Systeme, die aus mehreren reibungsfrei verbundenen Körpern bestehen, können getrennt werden. Dadurch ergeben sich zusätzliche linear unabhängige Gleichungen, siehe Abschnitt 2.6.*

Beispiel: Eingespannter und gelenkig gelagerter Balken

Wir betrachten einen links eingespannten und rechts gelenkig gelagerten Balken. Durch diese Lagerung müssen wir beim Freischneiden gesamthaft fünf unbekannte Lagerreaktionen einführen. Für ihre Berechnung stehen in der Ebene aber nur drei linear unabhängige Gleichungen zur Verfügung.

Das System ist also *zweifach statisch unbestimmt*.



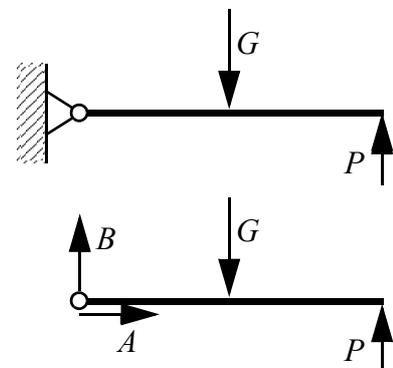
Ein System heisst **kinematisch unbestimmt**, falls zulässige momentane Bewegungszustände möglich sind. Ein kinematisch unbestimmtes System kann nicht statisch bestimmt sein, weil es nicht für beliebige Belastungen in Ruhe ist. Falls mehr linear unabhängige Gleichungen als unbekannte Lagerreaktionen vorliegen, so ist das System kinematisch unbestimmt.

Beispiel: Gelenk

Für beliebige P ist das skizzierte System nicht in Ruhe: Es müssen drei Gleichgewichtsbedingungen erfüllt werden, wobei nur zwei unbekannte Grössen variiert werden können (A und B). Die Momentenbedingung bez. des Gelenks ist im Allgemeinen verletzt.

Das System ist *kinematisch unbestimmt*.

Nur für ein bestimmtes P ist Ruhe möglich, nämlich für $P = G/2$ (sofern die Kraft G in der Mitte angreift).



Alternativ zum Abzählen von Gleichungen kann die Statische Unbestimmtheit eines Systems auch durch Lösen von Bindungen bestimmt werden. Dabei geht man schrittweise vor und macht Bindungskomponenten beweglich. Jede

Bindungskomponente entspricht einer Kraftkomponente (verhinderte Translation) oder einer Momentkomponente (verhinderte Rotation). Der Prozess endet, sobald das so verwandelte System kinematisch unbestimmt wird.

Beispiel: Kinematische Bestimmung der statischen Unbestimmtheit.

Wir betrachten wieder den statisch unbestimmt gelagerten Balken von oben.

Das ursprüngliche System (a) ist nicht kinematisch unbestimmt, es existiert also kein zulässiger Bewegungszustand.

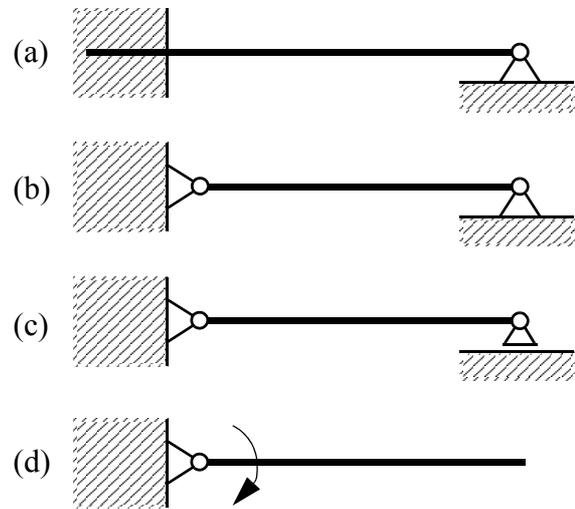
Nun lösen wir eine Bindungskomponente, z.B. indem wir die Einspannung durch ein Gelenk ersetzen. Das neue System (b) ist immer noch nicht kinematisch unbestimmt.

Also lösen wir eine weitere Bindungskomponente und machen z.B. aus dem Gelenk rechts ein (bewegliches) Auflager. Auch das neue System (c) ist noch nicht kinematisch unbestimmt.

Jedes Lösen einer weiteren Bindungskomponente macht das System nun aber kinematisch unbestimmt. Z.B. ist in System (d) eine Rotation um das Gelenk links ein zulässiger Bewegungszustand.

Also können wir maximal zwei Bindungskomponenten lösen, ohne ein kinematisch unbestimmtes System zu erhalten. Das bedeutet, dass das System (a) zweifach statisch unbestimmt ist.

Bei diesem Prozess kann man die Bindungskomponenten auch auf andere Weise lösen, z.B. zuerst aus dem rechten Gelenk ein Auflager machen und es dann ganz entfernen. Der so ermittelte Grad der statischen Unbestimmtheit ist unabhängig vom Vorgehen.



☞ *Ein System aus starren Teilen ist genau dann statisch bestimmt, wenn es als Ganzes und in jedem Teil weder statisch unbestimmt (klemmend) noch kinematisch unbestimmt (endlich oder infinitesimal beweglich) ist. In diesem Fall kann man alle inneren und äusseren Lagerkräfte aus den Gleichgewichtsbedingungen ermitteln.*

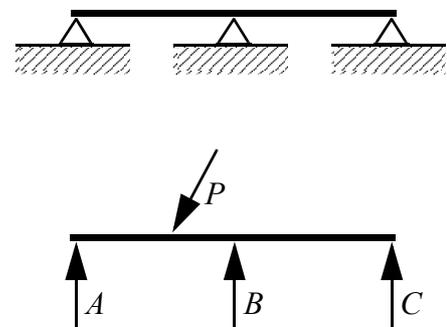
Es ist durchaus möglich, dass ein System gleichzeitig kinematisch und statisch unbestimmt ist.

Beispiel: Statisch und kinematisch unbestimmtes System

Bei einem dreifach aufgelegten Balken müssen drei unbekannte Auflagerkräfte A , B , C eingeführt werden. Man hat auch drei Gleichgewichtsbedingungen und könnte deshalb auf ein statisch bestimmtes System schliessen.

Allerdings ist die Komponentenbedingung in horizontaler Richtung bei beliebiger Last nicht erfüllbar, weil keine horizontalen Lagerkräfte vorliegen. Dies entspricht der zulässigen horizontalen Translation und beides bedeutet kinematische Unbestimmtheit.

Aus den restlichen zwei Gleichgewichtsbedingungen lassen sich die drei Unbekannten nicht mehr ermitteln, also ist das System gleichzeitig statisch unbestimmt. Das zeigt sich auch darin, dass die Lager in vertikaler Richtung kein Spiel zulassen. Sie müssen auf exakt der gleichen Höhe sein, sonst hebt der Balken ab.



Bemerkungen zur Terminologie

Die Aussagen *statisch bestimmt* und *nicht statisch unbestimmt* können unterschiedliche Sachverhalte bezeichnen: Ein bewegliches (also kinematisch unbestimmtes) System ist sicher nicht statisch bestimmt, aber im Allgemeinen nicht statisch unbestimmt (Beispiel: Pendel).

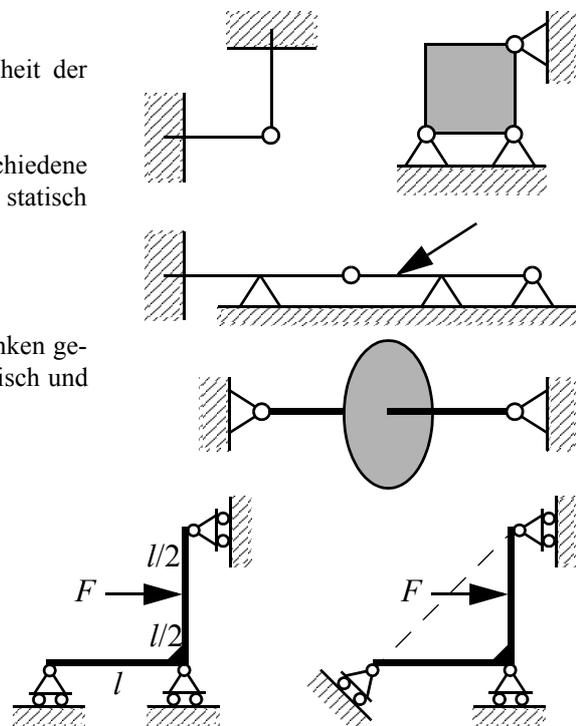
Diese Terminologie deckt sich mit derjenigen des Buchs von Gross et al. (siehe Literaturverzeichnis). Leider werden in anderen Büchern oft auch andere Begriffe und Bedeutungen verwendet (unterbestimmt, überbestimmt etc.). Einzig bei der statischen Bestimmtheit sind sich die Autoren grossmehrheitlich einig.

Kontrollfragen

1. Was ist eine Bindung?
2. Was ist eine (für eine Bindung) zulässige Bewegung?
3. Was ist eine (für eine Bindung) unzulässige Bewegung?
4. Welche Bindungskräfte heissen Reibungsreaktionen?
5. Wodurch ist eine reibungsfreie Bindung charakterisiert?
6. Kann eine Bindung reibungsfrei und gleichzeitig nicht reibungsfrei sein?
7. Was ist die Normalkraft?
8. Weshalb kann man in einer Einspannung keine Reibungsreaktionen einführen?
9. Kann man in einem Gelenk Reibungsreaktionen einführen? Falls ja: welche?
10. Skizzieren Sie mindestens vier gebräuchliche Bindungen!
11. Wann ist ein System statisch unbestimmt, wann ist es kinematisch unbestimmt?

Übungen

1. Bestimmen Sie den Grad der statischen Unbestimmtheit der skizzierten ebenen Systeme.
2. Skizzieren Sie für jedes System mindestens zwei verschiedene Wege, um durch sukzessives Lösen von Bindungen ein statisch bestimmtes System zu erhalten!
3. Ein Rotor (räumliches System) ist mit zwei Kugelgelenken gelagert. Zeigen Sie, dass dieses System gleichzeitig statisch und kinematisch unbestimmt ist.
4. Ein gewichtslos modellierter Winkel ist durch drei reibungsfreie Auflager gelagert und durch eine horizontale Kraft belastet. Stellen Sie die Gleichgewichtsbedingungen für beide skizzierten Varianten auf und versuchen Sie, die Lagerkräfte zu bestimmen. Weshalb ist das in einem Fall problematisch?



2.6 Analytische Statik

Lernziele

- Sie können mit dem Prinzip der virtuellen Leistungen Stabkräfte in ebenen idealen Fachwerken berechnen.
- Sie wissen, wann ein System getrennt werden muss und wie man das tut.
- Sie kennen das Lösungsprogramm aus dem Skript und können anhand dieser Schritte reibungsfreie Probleme der Statik lösen. Dabei geht der Punkt der Diskussion nicht vergessen.
- Sie wissen, wie man mit verteilten Normalkräften umgeht und wie man das Kippen diskutiert.
- Sie können Probleme mit Flaschenzügen durch Trennen und direkt mit dem Prinzip der virtuellen Leistungen lösen.

In diesem Abschnitt studieren wir Methoden, um durch Aufstellen und Lösen von Gleichungen die an einem System auftretenden Kräfte zu bestimmen. Man spricht bei diesen Methoden von **analytischer Statik**. Es existieren auch *grafische* Methoden zur Lösung von Statikproblemen (*grafische Statik*). Wir verzichten hier auf deren Studium, da sie momentan als veraltet betrachtet werden.

Grundsätzlich haben wir zwei Hauptwerkzeuge zur Verfügung, das Prinzip der virtuellen Leistungen (2.15) und den Hauptsatz der Statik. Letzterer kann bei *Systemen* allerdings nur verwendet werden, wenn sie in ihre Starrkörperteile aufgetrennt und in den Schnitten die richtigen Schnittkräfte eingeführt werden (s.u.), was einen wesentlichen Aufwand bedeutet. Dadurch ergibt sich eine Faustregel zur Auswahl der Methoden:

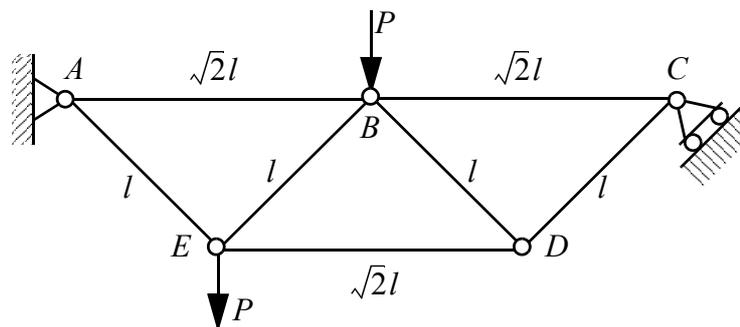
- Falls bei einem System nur eine Kraft gesucht ist, so lässt sich diese oft am einfachsten direkt mit dem PdvL bestimmen, indem ein geschickter Bewegungszustand angesetzt wird. Dies kann auch gelten, wenn wenige Kräfte gesucht sind.
- Falls man aber alle Lager- und Bindungskräfte bestimmen will, so lohnt sich die Trennung des Systems und die Anwendung des Hauptsatzes auf alle Teile.

Beispiel: Fachwerk

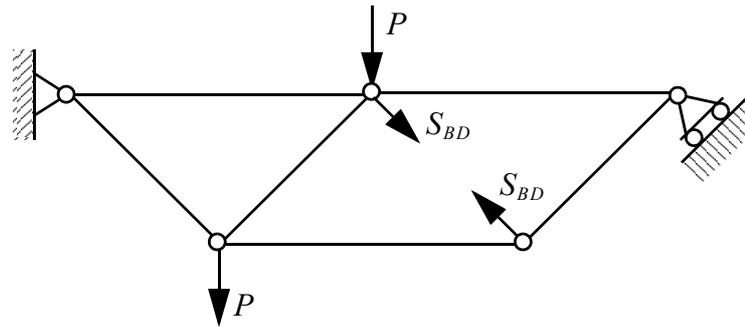
Ein **ideales Fachwerk** ist ein System aus reibungsfrei gelenkig gelagerten Stäben (Pendelstützen), das nur in den Gelenken belastet ist.

Wenn wir die einzelnen Stäbe betrachten und an ihnen Gleichgewichtsbedingungen formulieren, so sehen wir sofort, dass die Stabkräfte nur in Stabrichtung liegen können.

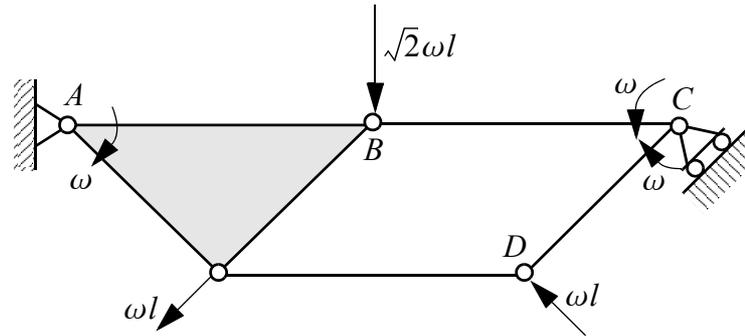
Im skizzierten System sei die Stabkraft S_{BD} im Stab BD gesucht.



Wir ersetzen zuerst den Stab BD durch seine Stabkraft (konventionellerweise wird sie als Zugkraft eingeführt). Dadurch entsteht aus dem statisch bestimmten System ein Mechanismus, d.h., das neue System ist einfach kinematisch unbestimmt. Der Bewegungszustand dieses Mechanismus soll im nächsten Schritt bestimmt werden. Dazu geben wir z.B. die Rotationsgeschwindigkeit ω des Dreiecks ABE vor.



Mit den Methoden aus Abschnitt 1.2 können wir nun den Bewegungszustand ermitteln. Eigentlich interessieren uns dabei nur diejenigen Punkte, an denen Kräfte angreifen, denn nur sie liefern im PdvL einen Beitrag. Diese Geschwindigkeiten sind in der Skizze eingetragen.



Zum Schluss formulieren wir das PdvL für diesen (zulässigen) Bewegungszustand (deshalb ohne Tilden). Darin erscheinen nur die unbekannte Stabkraft und die äusseren Lasten. Somit haben wir die Aufgabe praktisch schon gelöst:

$$\mathcal{P} = \omega S_{BD} + \sqrt{2}\omega l \frac{S_{BD}}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\omega l P + \frac{\sqrt{2}}{2}\omega l P$$

$$\mathcal{P} = 0.$$

Also:

$$S_{BD} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}P \text{ (Druckstab).}$$

Wir fassen die Lösungsschritte zusammen:

1. den Stab (bei dem die Stabkraft gesucht ist) entfernen, die Stabkraft an beiden Knoten (Gelenken) als Zugkraft einführen,
2. den Bewegungszustand des entstandenen Mechanismus bestimmen,
3. das PdvL formulieren, d.h., die Leistungen der angreifenden Kräfte für den Bewegungszustand aufsummieren und gleich null setzen,
4. nach der Stabkraft auflösen (ein positives Vorzeichen entspricht einer Zugkraft, ein negatives Vorzeichen einer Druckkraft).

Um den Hauptsatz der Statik auf ein *System* von starren Körpern anwenden zu können, muss dieses **getrennt** werden. Ansonsten erhält man zu wenig Gleichungen, um die Unbekannten zu bestimmen – und dies, obwohl keine statische Unbestimmtheit vorliegt. Man trennt in Bindungen, die keine vollständige Dynamik enthalten. An den Trennstellen müssen (je nach Bindungstyp) Kräfte, sog. **Schnittkräfte**, (und ev. Momente) eingeführt werden. Gemäss dem Reaktionsprinzip haben die Schnittkräfte an den beteiligten Körpern umgekehrte Richtungen. Weil die Dynamik in der Schnittstelle nicht vollständig ist, handelt man sich für jeden Schnitt neue Gleichungen gegen weniger neue Unbekannte ein.

Beispiel: System trennen

Wir betrachten zwei gewichtslose, mit einem reibungsfreien Gelenk verbundene Balken. In A sei eine Einspannung, in C ein Auflager. Beide vertikalen Lasten haben den Betrag P .

Gesucht sind alle Lagerkräfte und -momente.

Wir trennen in B . P in B kann willkürlich zum linken Balken gerechnet werden. Beim Einführen der Schnittkräfte B_1 und B_2 beachten wir das Reaktionsprinzip.

Nun stellen wir die Gleichgewichtsbedingungen für die beiden Körper auf:

$$KB(I, x): A_1 + B_1 = 0,$$

$$KB(I, y): A_2 + B_2 - P = 0,$$

$$MB(I, A): M + lB_2 - lP = 0;$$

$$KB(II, x): -B_1 = 0,$$

$$KB(II, y): C - B_2 - P = 0,$$

$$MB(II, B): lC - \frac{l}{2}P = 0.$$

Daraus ergibt sich

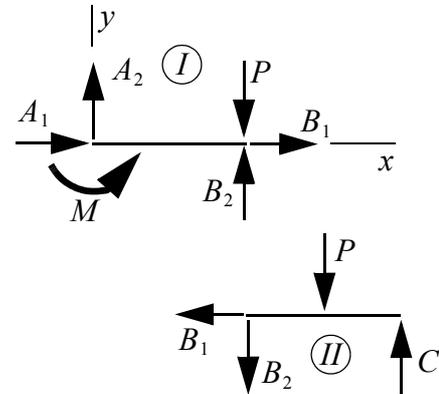
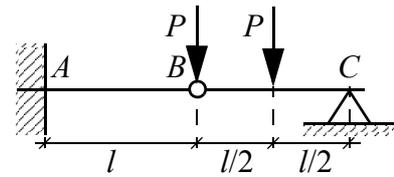
$$A_1 = B_1 = 0, C = \frac{P}{2}, A_2 = \frac{3}{2}P, B_2 = -\frac{P}{2}, M = \frac{3l}{2}P.$$

Oft sind die Schnittkräfte nicht gesucht. Dann ist es am einfachsten, die Gleichgewichtsbedingungen für das ganze System zu formulieren. Die restlichen Gleichungen konstruiert man mit geschickten Momentenbedingungen für die Teile des Systems. Die Schnittkräfte dürfen darin natürlich nicht vorkommen.

Beispiel: Geschickte Momentenbedingung

Im obigen Beispiel liefert die Momentenbedingung um B (z.B. für den rechten Teil formuliert) eine Gleichung, die – zusammen mit den Gleichgewichtsbedingungen für das ganze System – die Aufgabe löst.

Eine sinnvolle Organisation für Problemlösungen aller Art ist in «Appendix D: Problemlösung» auf Seite 139 beschrieben. Die folgenden Punkte gehören alle zum 3. Schritt «Lösung konstruieren». Sie bilden also nur einen Teil des gesamten Problemlösungsprozesses und stehen in der Mitte, nachdem das Problem beschrieben und analysiert ist und bevor die Lösung bewertet und die Arbeit verwertet wird. Die Schritte sollen eine Anregung geben für die Aufteilung der Lösungskonstruktion in Unterprobleme.

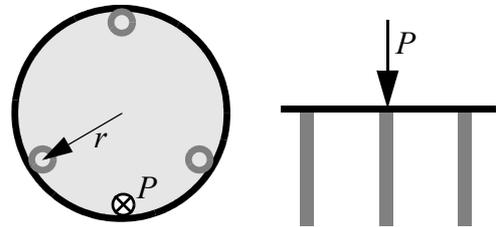


1. Materielles System abgrenzen; freigeschnittenes System zeichnen (Kräfte statt Lager!).
2. Äussere Lasten und Bindungskräfte einführen.
3. Zweckmässiges Koordinatensystem wählen.
4. Gleichungen und Unbekannte abzählen.
5. Gleichgewichtsbedingungen und eventuell weitere Gleichungen komponentenweise formulieren.
6. Falls nötig: System trennen, Schnittkräfte einführen und Schritte 3 bis 5 wiederholen (dabei nur linear unabhängige Gleichungen mitnehmen).
7. Gleichungen nach den Unbekannten auflösen.
8. Resultate und eventuelle Zusatzbedingungen diskutieren (Richtung der Normalkräfte, Haftreibungsgesetze, Knicken, Festigkeit etc.).

Beispiel: Tisch

Jemand stützt sich auf den Rand eines runden Tisches (Gewicht G) ab.

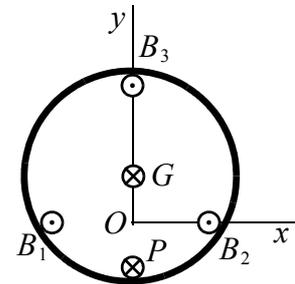
Gesucht sind die Normalkräfte an den Tischbeinen. Wann kippt der Tisch?



1. System: Tisch (Beine irrelevant).
2. Gemäss Skizze.
3. Gemäss Skizze.
4. 3 Unbekannte, 3 Gleichungen.
5. $KB(z) : B_1 + B_2 + B_3 - G - P = 0$,

$$MB(O, x) : \frac{r}{2}P - \frac{r}{2}G + \frac{3}{2}rB_3 = 0,$$

$$MB(O, y) : \frac{\sqrt{3}r}{2}B_1 - \frac{\sqrt{3}r}{2}B_2 = 0.$$



6. Unnötig.
7. $B_3 = \frac{G}{3} - \frac{P}{3}$,
 $B_1 = B_2 = \frac{G}{3} + \frac{2P}{3}$.
8. Kein Kippen bedeutet $B_i > 0$ für $i = 1, 2, 3$. Für positives P ist die Bedingung an B_3 relevant, d.h. $P < G$.

Beispiel: Abgestützte Platte

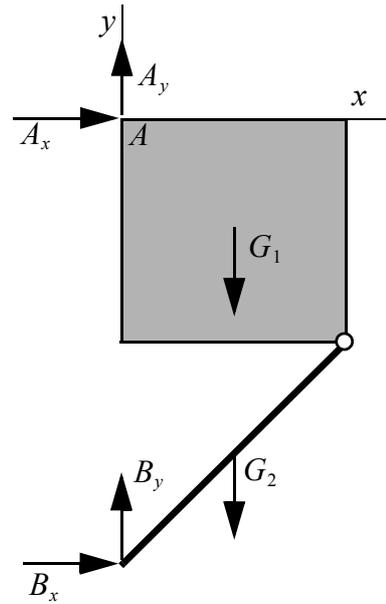
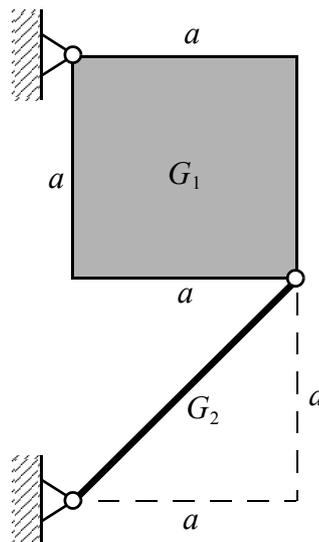
Eine homogene Quadratplatte (Gewicht G_1) wird gemäss der Skizze durch einen Balken (Gewicht G_2) gestützt. Die Gelenke sind reibungsfrei.

Gesucht sind alle Lagerreaktionen.

1. System: Platte und Balken.
2. Gemäss Skizze.
3. Gemäss Skizze.
4. 4 Unbekannte, 3 Gleichungen am Gesamtsystem.
5. $KB(x) : A_x + B_x = 0 ;$

$$KB(y) : A_y + B_y - G_1 - G_2 = 0 ;$$

$$MB(A) : -\frac{a}{2}G_1 - \frac{a}{2}G_2 + 2aB_x = 0 .$$



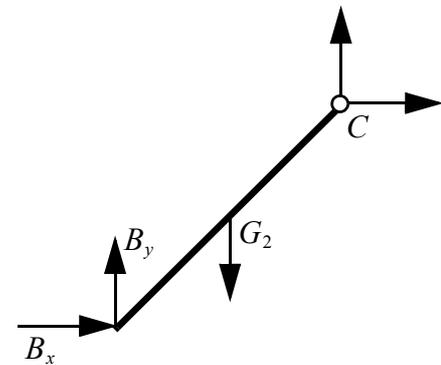
6. Wir trennen im Gelenk zwischen Balken und Platte. Da es reibungsfrei ist, müssen nur zwei Kraftkomponenten eingeführt werden. Diese interessieren uns aber nicht. Deshalb stellen wir (für den Balken) eine Momentenbedingung bezüglich des in C aufgetrennten Gelenks auf.

$$MB(C) : \frac{a}{2}G_2 - aB_y + aB_x = 0 .$$

7. Lösung:

$$A_x = -\left(\frac{G_1 + G_2}{4}\right), A_y = \frac{3G_1 + G_2}{4},$$

$$B_x = \frac{G_1 + G_2}{4}, B_y = \frac{G_1 + 3G_2}{4} .$$

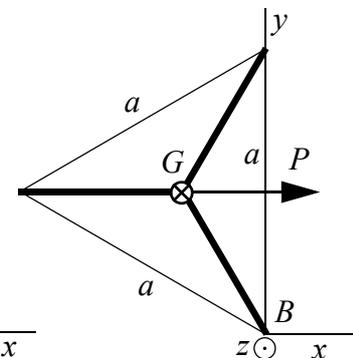
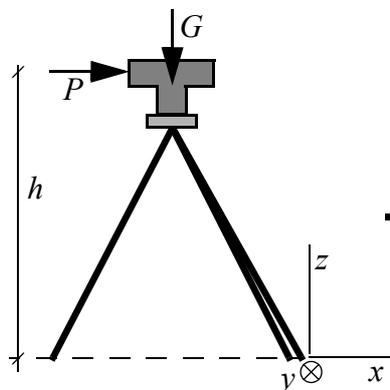


8. Balken, die auf Druck belastet sind, versagen i.A. vor solchen, die (mit der gleichen Kraft) auf Zug belastet sind, da erstere **knicken** können. Deshalb wäre es vielleicht besser, die Stütze oben anzubringen.

Beispiel: Theodolit

Wie stark darf man mit einer horizontalen Kraft P an einem Theodoliten (Gewicht G) auf einem Stativ (Gewicht $\ll G$) stossen, ohne dass er kippt?

1. System: Theodolit mit Stativ.
2. Gemäss Skizze.
3. Gemäss Skizze.
4. 9 Unbekannte, 6 Gleichungen am Gesamtsystem.



$$5. \quad KB(x) : F_{Ax} + F_{Bx} + F_{Cx} + P = 0,$$

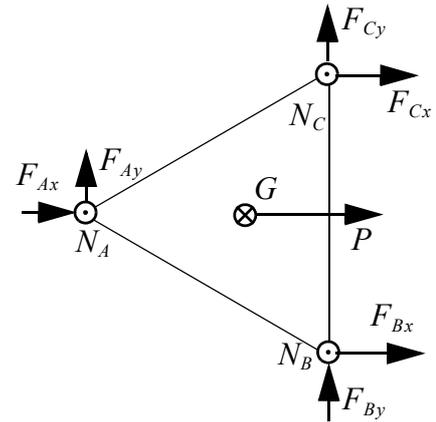
$$KB(y) : F_{Ay} + F_{By} + F_{Cy} = 0,$$

$$KB(z) : N_A + N_B + N_C - G = 0,$$

$$MB(B, x) : \frac{a}{2}N_A + aN_C - \frac{a}{2}G = 0,$$

$$MB(B, y) : \frac{\sqrt{3}}{2}aN_A - \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}aG + hP = 0,$$

$$MB(B, z) : -aF_{Cx} - \frac{a}{2}P - \frac{a}{2}F_{Ax} - \frac{\sqrt{3}}{2}aF_{Ay} = 0.$$



6. Trennen wäre dann nötig, wenn man die F_{ij} berechnen möchte, wir brauchen aber nur die N_i .

7. Als Resultate erhalten wir:

$$N_A = \frac{G}{3} - \frac{2\sqrt{3}h}{3}P,$$

$$N_C = \frac{G}{2} - \frac{1}{2}N_A = \frac{G}{3} + \frac{\sqrt{3}h}{3}P,$$

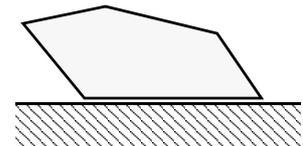
$$N_B = G - (N_A + N_C) = \frac{G}{2} - \frac{N_A}{2} = N_C.$$

8. Der Theodolit kippt genau dann, wenn eine Normalkraft negativ werden müsste (was nur mit einer geeigneten Verankerung realisierbar wäre). Damit er also nicht kippt, muss gelten:

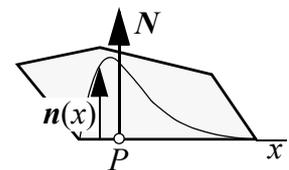
$$N_A > 0, \text{ d.h. } P < \frac{\sqrt{3}a}{6h}G;$$

$$N_B, N_C > 0, \text{ d.h. } P > -\frac{\sqrt{3}a}{3h}G.$$

In einem *nicht punktförmigen, ebenen Auflager* wirken Normalkräfte, deren genaue Verteilung wir nicht kennen. Sie hängt von der eventuellen Deformierbarkeit der Körper und den Details der Oberflächen ab. Die Normalkraftdichte (Normalkraft pro Längen- bzw. pro Flächeneinheit) kann durch eine unbekannte Funktion $n(x)$ (bzw. $n(x, y)$) beschrieben werden.

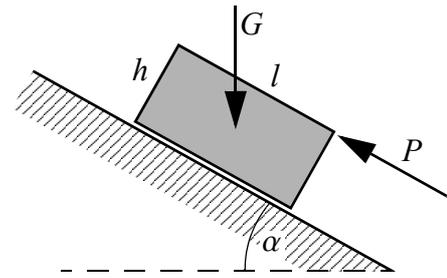


Entscheidend ist nun, dass die verteilten Normalkräfte eine *parallele* Kräftegruppe bilden. Deren Resultierende verschwindet nicht, weil alle Kräfte in dieselbe Richtung zeigen. Gemäss Kapitel 2.2 ist die Kräftegruppe also statisch äquivalent zu einer Einzelkraft N . Ihr Angriffspunkt P ist allerdings unbekannt; er muss und kann aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden. Der Angriffspunkt der Einzelkraft muss innerhalb der **Standfläche** liegen, sonst **kippt** der Körper. (Mathematisch ist die Standfläche die konvexe Hülle der Berührungsfläche.)

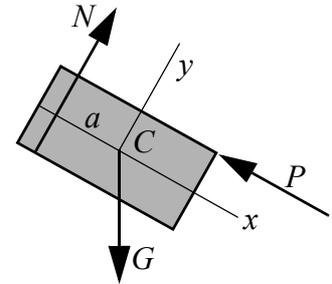


Beispiel: Klotz auf schiefer Ebene

Ein Klotz (Gewicht G , Länge l , Höhe h) liegt reibungsfrei auf einer schiefen Ebene. Neben dem Gewicht greift parallel zur Unterlage die skizzierte Kraft P an.



Wie gross muss P sein, damit der Klotz in Ruhe ist? Wo greift die Normalkraft an?



1. System: Klotz.
2. Gemäss Skizze. Der Angriffspunkt der Normalkraft N ist unbekannt!
3. Gemäss Skizze.
4. 3 Unbekannte (P, N, a), 3 Gleichungen.
5. $KB(x) : -P + G \sin \alpha = 0,$

$$KB(y) : N - G \cos \alpha = 0,$$

$$MB(C) : P \frac{h}{2} - Na = 0.$$

6. Unnötig.

7.
$$P = G \sin \alpha,$$

$$N = G \cos \alpha,$$

$$a = \frac{h}{2} \tan \alpha.$$

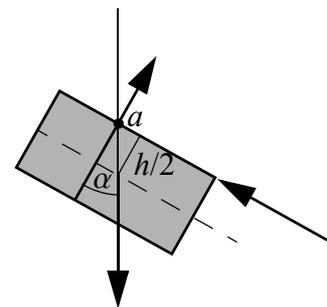
8. Die Länge a kann nicht grösser als $l/2$ werden, ansonsten würde der Klotz kippen. Daraus folgt die Bedingung

$$|a| \leq \frac{l}{2} \text{ bzw. } \tan \alpha \leq \frac{l}{h}.$$

Zudem muss die Normalkraft positiv sein, also $\cos \alpha > 0$, also $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$: Die schiefe Ebene darf nicht überhängen.

Bemerkung: Drei Kräfte in der Ebene

Beim obigen ebenen System greifen genau drei Kräfte an. Drei nichtparallele Kräfte in der Ebene können aber nur dann im Gleichgewicht sein, wenn sich ihre Wirkungslinien in einem Punkt schneiden (weshalb?). Also muss die Wirkungslinie der Normalkraft durch den gezeichneten Punkt gehen. Daraus können wir auch geometrisch auf die Länge a schliessen. Diese Überlegung ist manchmal praktisch, funktioniert aber bei mehr als drei Kräften nicht mehr.



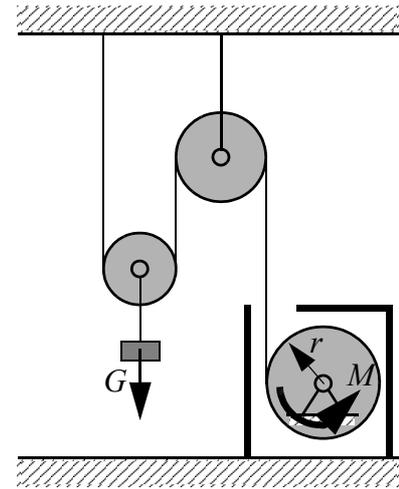
Beispiel: Flaschenzug

Ein Motor mit Antriebsmoment M treibt gemäss der Skizze einen Flaschenzug an.

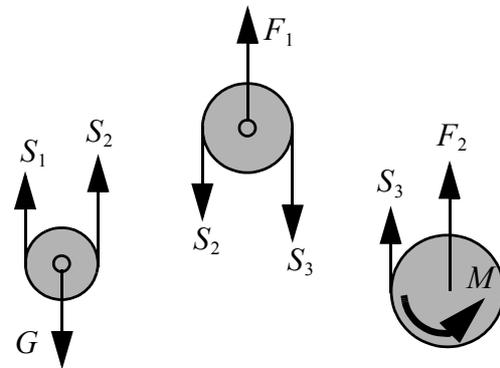
Wie gross muss M sein, damit die Last mit Gewicht G (gleichförmig) gehoben werden kann?

Diese Aufgabe scheint vorerst mit den Methoden der Statik nicht lösbar zu sein, da sich etwas bewegt. Wir werden aber in der Dynamik (Kapitel 3) sehen, dass Bewegungen von Körpern, bei denen sich die Kinematik bez. des Massenmittelpunkts nicht ändert, zur Statik äquivalent sind.

Für die Lösung kommen sowohl die Trennung des Systems und Lösung mit dem Hauptsatz der Statik als auch die direkte Anwendung des Prinzips der virtuellen Leistungen in Frage. Wir gehen zuerst nach unserem Schema vor:



1. Die Betrachtung des ganzen Systems nützt uns nichts. Wir müssen es in drei Teile trennen (siehe Skizze).
2. Gemäss Skizze.
3. Komponenten gemäss Skizze.
4. Total: 6 Unbekannte, 6 Gleichungen.
5. $S_1 + S_2 = G, S_1 = S_2,$
 $S_2 + S_3 = F_1, S_2 = S_3,$
 $F_2 = -S_3, M = rS_3.$
6. Schon gemacht.
7. $S_1 = S_2 = S_3 = \frac{G}{2}, M = \frac{rG}{2}.$
8. Das Resultat ist nicht sehr überraschend.



Bei der Anwendung des PdvL nehmen wir als virtuellen Bewegungszustand einen wirklichen, z.B. gegeben durch die Rotationsgeschwindigkeit ω des Motors.

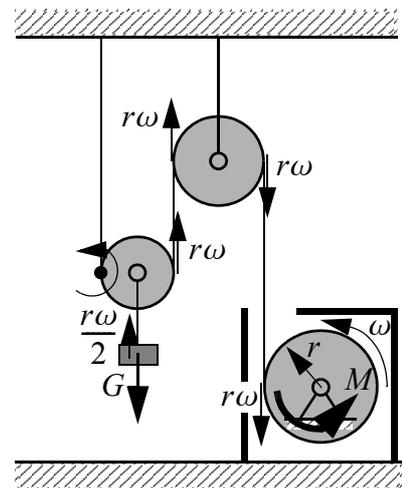
Zuerst muss die Kinematik gemäss der Skizze gelöst werden.

Nur das Gewicht und der Motor sind nicht leistungslos. Also erhalten wir für die Leistung:

$$\mathcal{P} = M\omega - \frac{Gr\omega}{2} = 0.$$

Daraus wird

$$M = \frac{rG}{2}.$$

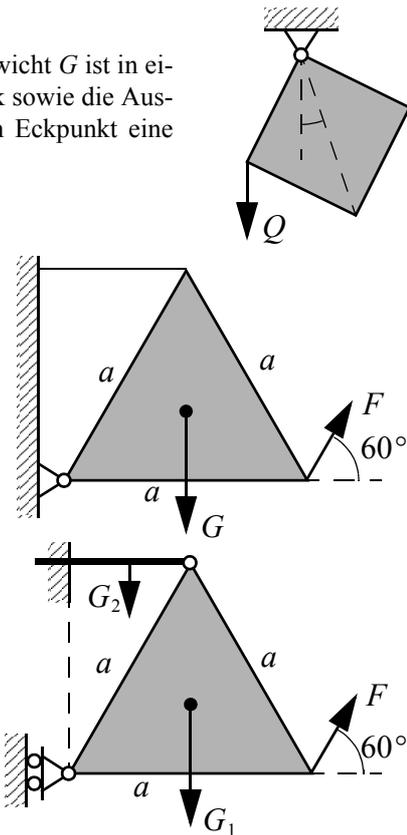


Kontrollfragen

1. Beschreiben Sie zwei verschiedene Wege, um Probleme der Statik anzupacken! Wann ist welcher Weg günstiger?
2. Wie erhalten Sie für ein System aus mehreren starren Körpern genügend Gleichungen, um alle Unbekannten zu bestimmen?
3. Beschreiben Sie das Vorgehen bei der Lösung von Statikaufgaben!

Übungen

1. Eine homogene quadratische Platte der Seitenlänge a und mit dem Gewicht G ist in einem Eckpunkt gelenkig gelagert. Finden Sie die Reaktionen im Gelenk sowie die Auslenkung der Platte aus der Vertikalen, wenn wie skizziert am linken Eckpunkt eine vertikale Last Q angreift!
2. Eine homogene, gleichseitige Dreieckplatte ist gemäss der Skizze reibungsfrei gelenkig gelagert und an einem Faden befestigt. Bestimmen Sie die Lagerkräfte, indem Sie für drei verschiedene Bezugspunkte die Momentenbedingungen formulieren! Können Sie erreichen, dass in jeder Gleichung nur eine Unbekannte auftritt? Wie steht es, wenn der Faden nicht horizontal ist?
3. Die obige Dreieckplatte habe jetzt das Gewicht G_1 und sei an Stelle des Fadens durch einen eingespannten Balken vom Gewicht G_2 befestigt. Das untere Lager sei verschiebbar gemacht (warum?). Berechnen Sie für dieses System die Lagerkräfte!



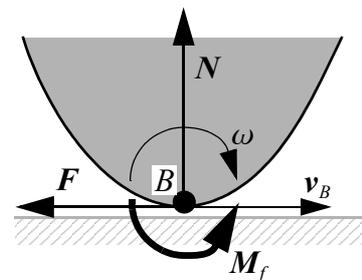
2.7 Reibung

Lernziele

- Sie können die Gesetze für trockene Reibung und Rollwiderstand anwenden.
- Sie benutzen das Haftreibungsgesetz nur als Ungleichung in der Diskussion.
- Sie benutzen das Gleitreibungsgesetz, um eine zusätzliche Gleichung zu erhalten.
- Sie assoziieren den Rollwiderstand mit der Deformation der beteiligten Körper und können den Mechanismus erklären.
- Sie wissen, dass die besprochenen Gesetze für trockene Haft- und Gleitreibung empirisch gewonnen sind.
- Sie wissen, dass bei Luft- oder Flüssigkeitsreibung geschwindigkeitsabhängige Terme vorkommen.
- Falls Sie mit Lagerreibung konfrontiert werden, wissen Sie, wo Sie im Skript Informationen finden.

Wir haben bisher ausschliesslich reibungsfreie Bindungen betrachtet, d.h. solche, bei denen in Richtung der zulässigen Bewegungen keine Reaktionen auftreten. Dies ist natürlich für viele reale Systeme eine grobe Vereinfachung. Deshalb wollen wir in diesem Abschnitt auch noch die **raue** Berührung zweier Körper studieren.

Um in der Bindung eine vollständige Dynamik zu erhalten, müssen zur Normalkraft N (reibungsfreie Reaktion) noch eine **Reibungskraft F** und ein **Rollwiderstandsmoment** (auch: **Rollreibungsmoment**) M_f eingeführt werden. Diese sind in Richtung der zulässigen Bewegungen.



Falls der Berührungspunkt B momentan in Ruhe ist ($v_B = 0$), so nennen wir F **Haftreibungskraft**, ansonsten **Gleitreibungskraft**. (Entscheidend ist die relative Geschwindigkeit des materiellen Punktes B des betrachteten Körpers im Vergleich zum materiellen Punkt der Unterlage.)

Im Fall der Haftung kann aus Experimenten empirisch das **Haftreibungsgesetz** abgeleitet werden:

$$|\mathbf{F}| \leq \mu_0 |\mathbf{N}|. \quad (2.17)$$

Die Konstante μ_0 heisst **Haftreibungskoeffizient**. Das Haftreibungsgesetz verknüpft also den maximal möglichen Betrag der Haftreibungskraft linear mit der Normalkraft. Die Haftreibungskraft kann daraus nicht berechnet werden!

Bewegt sich andererseits der Berührungspunkt ($v_B \neq 0$), so gilt das **Gleitreibungsgesetz**:

$$|\mathbf{F}| = \mu_1 |\mathbf{N}|. \quad (2.18)$$

Diese Gleichung legt den *Betrag* fest. Die *Richtung* der Gleitreibungskraft ist immer *entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung*. Man nennt solche Kräfte auch **Widerstandskräfte**. Die Konstante μ_1 heisst **Gleitreibungskoeffizient**. Aus dem Gleitreibungsgesetz können wir die Gleitreibungskraft berechnen. Wenn die Geschwindigkeit des Berührungspunktes mit v_B bezeichnet wird, so lässt sich das Gleitreibungsgesetz auch vektoriell schreiben als

$$\mathbf{F} = -\mu_1 |\mathbf{N}| \frac{\mathbf{v}_B}{|\mathbf{v}_B|}.$$

Falls sich die Unterlage bewegt, so muss für v_B die Relativgeschwindigkeit bezüglich der Unterlage eingesetzt werden.

Das Gleitreibungsgesetz (2.18) ist für trockene Oberflächen recht gut gültig. Man spricht deshalb von **trockener Reibung** oder auch **Coulombscher Reibung**. Sobald Flüssigkeiten oder Gase involviert sind, wird die Sache komplizierter. Dann resultiert die Gleitreibung aus *fluid-dynamischen* Effekten, die *geschwindigkeitsabhängig* sind (**Flüssigkeitsreibung**, **Luftreibung**). Wir beschränken uns hier auf die trockene Reibung.

Die folgende Tabelle gibt einen Anhaltspunkt über ungefähre Haft- und Gleitreibungskoeffizienten. Die Grössen hängen stark von den Details ab: Rauigkeit der Oberflächen, Schmier-schicht etc.

Materialkombination	Haftreibungskoeffizient μ_0	Gleitreibungskoeffizient μ_1
Stahl / Stahl	0.1 bis 0.5	0.1 bis 0.4
Stahl / Eis	0.02 bis 0.03	0.014 bis 0.015
Stahl / Teflon	0.04	0.04
Aluminium / Aluminium	1	1
Leder / Metall	0.4 bis 0.6	0.2 bis 0.3
Holz / Metall	0.5 bis 0.65	0.2 bis 0.5
Autoreifen / Strasse (trocken)	0.7 bis 0.9	0.5 bis 0.8
Ski / Schnee	0.1 bis 0.3	0.04 bis 0.2

Analog gilt für den Rollwiderstand im Fall der Ruhe das **Rollwiderstandsgesetz** (auch: *Rollreibungsgesetz*):

$$|\mathbf{M}_r| \leq \mu_2 |\mathbf{N}|, \quad (2.19)$$

mit der **Rollwiderstandslänge** (auch: *Rollreibungslänge*) μ_2 (der Dimension einer Länge).

Im Fall der Bewegung formuliert man das Gesetz üblicherweise mit derselben Konstante μ_2 :

$$|\mathbf{M}_f| = \mu_2 |\mathbf{N}|. \quad (2.20)$$

Analog zum Gleitreibungsgesetz muss \mathbf{M}_f entgegengesetzt zu ω orientiert sein. Formal können wir also im Fall der Bewegung auch schreiben:

$$\mathbf{M}_f = -\mu_2 |\mathbf{N}| \frac{\omega}{|\omega|}.$$

☞ *Es ist wichtig zu beachten, dass Haft- und Gleitreibung völlig verschieden behandelt werden müssen:*

- Im Fall der *Ruhe* muss die Reibungskraft (das Rollwiderstandsmoment) aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden. Das Reibungsgesetz liefert *nachträglich* ein Kriterium dafür, dass *Ruhe* wirklich möglich ist.
- Im Fall der *Bewegung* ist die Reibungskraft (das Rollwiderstandsmoment) durch die Normalkraft und die Reibungskonstante bestimmt. Das Reibungsgesetz liefert hier eine *zusätzliche Gleichung*.

Als *ideal rau* bezeichnet man eine Berührung mit $\mu_0 = \infty$, $\mu_2 = 0$. Ein gutes Zahnrad ist eine (approximierte) Realisierung davon.

Bemerkung: Zur Bezeichnung «Rollwiderstand»

Wir wählen bewusst die etwas unübliche Bezeichnung «Rollwiderstand» statt «Rollreibung». Oft wird nämlich der Rollwiderstand in unzulässiger Weise mit dem Haften oder Gleiten in Verbindung gebracht. Dabei haben die Effekte völlig unterschiedliche Ursachen und sind unabhängig voneinander: Rollwiderstand ohne Haften/Gleiten ist ebenso möglich wie Haften/Gleiten ohne Rollwiderstand. Zudem geht es beim Haften/Gleiten um Kräfte und beim Rollwiderstand um Momente!

Bemerkung: Modell für den Rollwiderstand

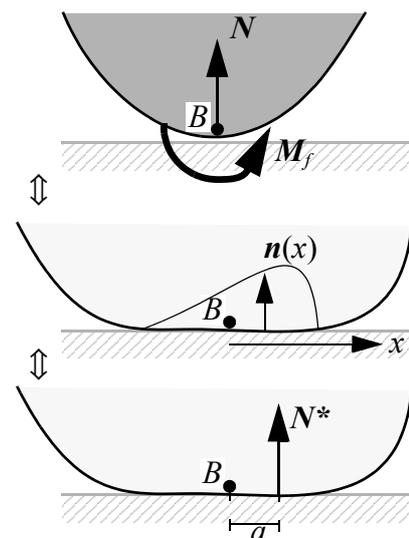
Rechts ist nochmals das idealisierte Bild mit einer punktförmigen Berührung gezeichnet.

Der Rollwiderstand tritt genau dann auf, wenn sich einer oder beide beteiligten Körper *deformieren*. Dadurch wird aus dem Berührungspunkt eine Berührungsfläche mit verteilten Normalkräften. Wir zeichnen deshalb eine Vergrößerung im Bereich des Berührungspunkts B mit der unbekannt verteilten Normalkraftdichte $\{n(x)\}$.

Der Kräftemittelpunkt von $\{n(x)\}$ liegt im unbekanntem Abstand a von B , die Kräftegruppe ist also statisch äquivalent zu einer Einzelkraft N^* in diesem Punkt. Diese Einzelkraft wiederum ist statisch äquivalent zu einer betragsmäßig gleichen Einzelkraft N in B und einem Kräftepaar mit Moment

$$M_f = aN. \quad (2.21)$$

Dieses Moment ist das Rollwiderstandsmoment und die Kraft die Normalkraft N .



Im Fall der Ruhe ist die Länge a beschränkt. Der Angriffspunkt der Normalkraft N^* kann sicher nicht ausserhalb der Berührungsfläche liegen, das ist die absolute Limite. Im realen System wird sich der Körper schon vorher zu bewegen beginnen, indem er oder die Unterlage sich laufend deformiert. Es gibt also einen maximalen Wert für a :

$$|a| \leq a_{max}.$$

Also ist wegen (2.21)

$$|M_f| = |aN| = |a||N| \leq a_{max}|N|.$$

Durch Vergleich mit (2.19) können wir a_{max} mit der Rollwiderstandslänge μ_2 identifizieren. Das Rollwiderstandsgesetz ist also verwandt mit der Kippbedingung, siehe *Beispiel: Klotz auf schiefer Ebene* auf Seite 65.

Für den Fall der Bewegung ist N^* immer an der äussersten Grenze, also bei a_{max} . Das erklärt, weshalb beim Rollwiderstand (in diesem Modell) bei Ruhe und Bewegung derselbe Koeffizient angenommen werden darf.

Aus dieser Modellbildung schliessen wir, dass die Rollwiderstandslänge stark von der Grösse des Kontakts abhängt. Diese wiederum hängt von den Deformationen und der Geometrie der Körper (Krümmungsradius etc.) ab. Die Deformationen sind auch wieder von der Normalkraft abhängig, eine vertrackte Sache! Also muss die Wahl von μ_2 sehr auf die konkreten Umstände angepasst werden, μ_2 ist sozusagen «wenig konstant». Ganz im Gegensatz zu μ_0 und μ_1 , die bei trockenen Verhältnissen und kleinen Geschwindigkeiten nur von den Materialien abhängen (und nicht z.B. von der Normalkraft).

Beispiel: Rad auf schiefer Ebene

Eine homogenes Rad (Gewicht G , Radius r) liegt auf einer schiefer Ebene (Neigungswinkel α , $0 \leq \alpha < 90^\circ$). Unter welchen Bedingungen bleibt es in Ruhe?

1. System: Rad.
2. Gemäss Skizze.
3. Gemäss Skizze.
4. 3 Unbekannte, 3 Gleichungen.

$$\begin{aligned} KB(x) : G \sin \alpha - F &= 0, \\ KB(y) : N - G \cos \alpha &= 0, \\ MB(O) : M_f - rF &= 0. \end{aligned}$$

6. Unnötig.

$$7. F = G \sin \alpha,$$

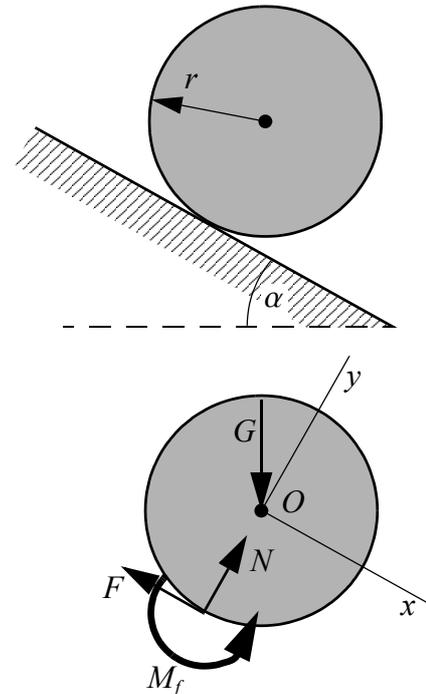
$$N = G \cos \alpha,$$

$$M_f = rG \sin \alpha.$$

8. Wir haben in diesem Haftreibungsproblem alle Reaktionen bestimmt. Nachträglich können wir nun untersuchen, wann Ruhe wirklich möglich ist.

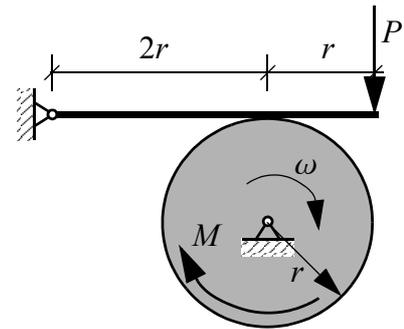
$$\text{Haftreibung: } (|F| \leq \mu_0 N) \leftrightarrow (G \sin \alpha \leq \mu_0 G \cos \alpha) \leftrightarrow (\tan \alpha \leq \mu_0),$$

$$\text{Rollwiderstandsgesetz für Ruhe: } (|M_f| \leq \mu_2 N) \leftrightarrow (rG \sin \alpha \leq \mu_2 G \cos \alpha) \leftrightarrow \left(\tan \alpha \leq \frac{\mu_2}{r} \right).$$



Beispiel: Bremse

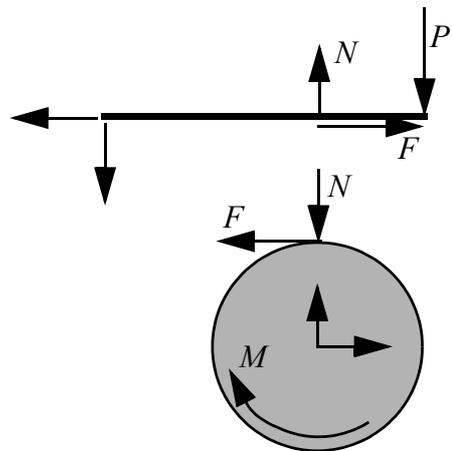
Wir betrachten eine in ihrem Zentrum gelagerte Rolle, auf die ein gemäss der Skizze gelagerter Balken drückt. Einfachheit halber nehmen wir an, dass Balken und Rolle gewichtslos seien. An der Rolle greift ein Moment M an und am Balken eine Kraft P , so dass er als Bremse wirkt (Gleitreibungskoeffizient μ_1 , Rollwiderstandslänge $\mu_2 = 0$).



Wie gross muss P sein, damit die Rolle mit konstanter Rotationsgeschwindigkeit ω rotiert?

Wie beim Beispiel mit dem Flaschenzug auf Seite 66 scheint diese Aufgabe nicht zur Statik zu gehören, da sich etwas bewegt. Wir werden in der Kinetik sehen, dass auch diese *gleichförmige* Bewegung mit den Methoden der Statik behandelt werden kann.

1. Wir betrachten Rolle und Balken sogleich getrennt und versuchen, nur das Nötigste zu berechnen.
2. Die Schnittkräfte F und N sind gemäss Skizze eingeführt. Die Lagerkräfte sind nur angedeutet, da wir sie gar nicht berechnen wollen.
3. Mit den Richtungen von F und N ist ein Koordinatensystem impliziert.
4. Wir haben gesamthaft 7 Unbekannte (P soll bestimmt werden, ist also eine Unbekannte!) und 6 Gleichgewichtsbedingungen. Als siebente Gleichung benutzen wir das Gleitreibungsgesetz.
5. Wir lesen die für uns wichtigen Resultate aus der Zeichnung ab:



$$N = \frac{3}{2}P,$$

$$M = rF.$$

6. Schon gemacht.
7. Die Resultate der Gleichgewichtsbedingungen haben wir in Punkt 5 schon berechnet. Um aber die gesuchte Beziehung zwischen M und P zu erhalten, müssen wir das Gleitreibungsgesetz (2.18) zuziehen:

$$F = \mu_1 N.$$

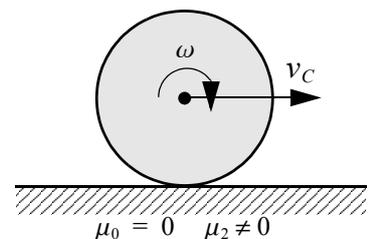
Damit erhalten wir

$$P = \frac{2}{3\mu_1} \frac{M}{r}.$$

8. Beachten Sie, dass wir hier das Gleitreibungsgesetz wirklich als zusätzliche Gleichung gebraucht haben.

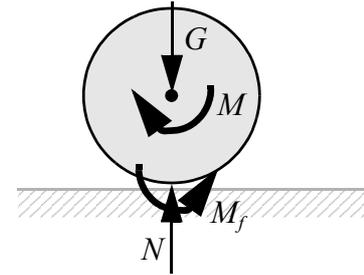
Beispiel: Rollwiderstand ohne Haft-/Gleitreibungskraft

Wir betrachten ein Rad (Gewicht G , Radius R), das auf einer perfekt glatten Unterlage ($\mu_0 = 0$) mit konstanter Mittelpunktsschnelligkeit v_C rollt, ohne zu gleiten. Es ist also $v_C = R\omega$. Es könnte sich dabei um ein Einrad oder um ein freigeschnittenes einzelnes Autorad auf Eis handeln. Im Gegensatz zur Haft- oder Gleitreibung sei aber der Rollwiderstand nicht vernachlässigbar ($\mu_2 \neq 0$). Das ist eine durchaus realistische Modellannahme.



Welche Kräfte/Momente sind für zur Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen und damit für die stationäre Bewegung nötig?

Wir schneiden frei und führen die Kräfte und Momente am Rad ein. Es sind dies die Gewichtskraft G (im realen System ergänzt durch die Achsenlast), die Normalkraft N und das Rollwiderstandsmoment M_f .



Die *Komponentenbedingung in horizontaler Richtung* ist erfüllt. Es müssen also keinerlei Zugkräfte und Reibungskräfte vorliegen.

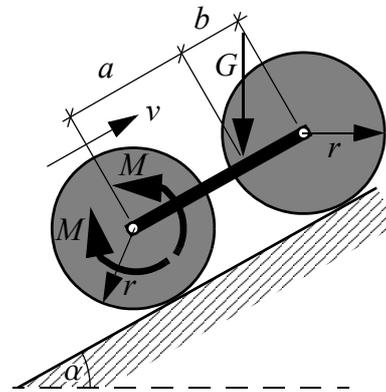
Die *Komponentenbedingung in vertikaler Richtung* ist auch erfüllt, falls die Normalkraft betragsmässig mit der Gewichtskraft übereinstimmt.

In einer *Momentenbedingung*, z.B. *bez. des Berührungspunktes*, steht M_f , aber G und N haben kein resultierendes Moment. Also braucht es ein zusätzliches Moment M , um die Rotation des Rades konstant zu halten. M ist das Moment, welches der Motor (oder die Einradfahrerin) auf das Rad ausübt. Ohne dieses Moment käme die Rotation langsam zum Stillstand und das Rad würde dann gleiten.

Hier sehen wir also, dass der Rollwiderstand auch völlig ohne Reibungskräfte möglich ist. In der Realität liegen beliebige Kombinationen von Rollen/Haften/Gleiten vor. Alle lassen sich in Rahmen unserer Modelle einfach diskutieren.

Beispiel: Auto am Berg

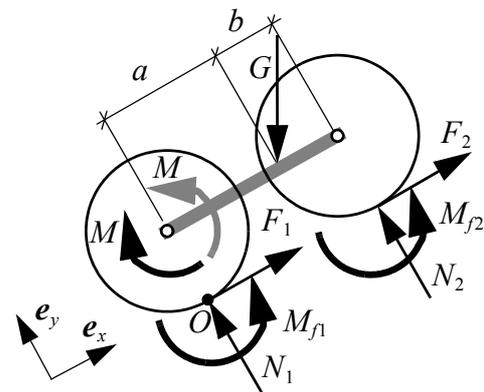
Wir wollen nun ein Beispiel betrachten, bei dem das Prinzip der virtuellen Leistungen nützlich ist: Ein Auto (Gewicht G) fährt mit der Schnelligkeit v eine gerade Strecke mit Neigungswinkel α hinauf ($|\alpha| < 90^\circ$). Der Haftreibungskoeffizient zwischen den Rädern und der Unterlage sei μ_0 , die Rollwiderstandslänge μ_2 .



Wie gross muss das Antriebsmoment auf die Hinterachse sein, damit die Schnelligkeit v konstant bleibt? Welches ist bei gegebenem μ_0 die maximale Steigung, welche bewältigt werden kann?

Unser (erstes) Modell ist sehr einfach. Wir betrachten ein ebenes System, bestehend aus zwei Rädern (Radius r) und dem Wagenkasten, den wir als massiven Balken modellieren. Der Massenmittelpunkt des Gesamtsystems hat die skizzierte Lage. Das Antriebsmoment wirkt auf die Hinterachse, die Vorderachse sei reibungsfrei. Die Räder rollen, ohne zu gleiten. Wir nehmen an, dass wir die Methoden der Statik auf die gleichförmige Bewegung anwenden können.

1. Wir betrachten vorerst das Gesamtsystem bestehend aus den Rädern und dem Wagenkasten.
2. Die Kräfte am System sind in der Skizze eingetragen. Speziell interessant ist hier das Antriebsmoment M , welches am Gesamtsystem ein **inneres Moment** (Kräftepaar) ist: Es wirkt am Hinterrad (im Uhrzeigersinn) und die Reactio darauf am Wagenkasten. In den Gleichgewichtsbedingungen des Gesamtsystems addieren sich die beiden Momente zu null. In den Gleichgewichtsbedingungen des Hinterrades allein oder des Wagenkastens ist das Antriebsmoment bzw. seine Reactio ein äusseres Moment. Im PdvL kann es, je nach virtuellem Bewegungszustand, etwas leisten oder nicht.



3. Siehe Skizze.

4. Wir haben sieben Unbekannte: $M, F_1, F_2, N_1, N_2, M_{f1}, M_{f2}$. Am Gesamtsystem stehen uns drei Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung. Dazu kommen zwei Gleichungen, die wir durch Trennen des Systems erhalten. Zudem genügen die zwei Rollwiderstandsmomente dem Rollwiderstandsgesetz (2.20). Also haben wir auch sieben Gleichungen. Das System statisch bestimmt.

5. Gleichgewichtsbedingungen am Gesamtsystem:

$$KB(x) : F_1 + F_2 - G \sin \alpha = 0 ,$$

$$KB(y) : N_1 + N_2 - G \cos \alpha = 0 ,$$

$$MB(O) : M_{f1} + M_{f2} + (a + b)N_2 - (a \cos \alpha - r \sin \alpha)G = 0 ,$$

$$\text{Rollwiderstandsgesetz: } M_{f1} = \mu_2 N_1 , M_{f2} = \mu_2 N_2 .$$

6. Wir sehen, dass mit der Komponentenbedingung in y -Richtung, der Momentenbedingung und den Rollwiderstandsgesetzen die Normalkräfte und die Rollwiderstandsmomente berechnet werden können (vier Gleichungen, für vier Unbekannte). Es fehlen also neben der Komponentenbedingung in x -Richtung noch zwei Gleichungen für die Haftreibungskräfte und das Antriebsmoment.

Zuerst formulieren wir z.B. eine Momentenbedingung für das nur aus dem Hinterrad bestehende System (um den Lagerungspunkt). Die Lagerkräfte kommen in dieser Momentenbedingung nicht vor (sie wären neue Unbekannte), hingegen das Antriebsmoment:

$$rF_1 + M_{f1} - M = 0 .$$

Nun wollen wir – statt einer weiteren Gleichgewichtsbedingung (z.B. einer Momentenbedingung für das Vorderrad) – das *PdVL für den wirklichen Bewegungszustand* formulieren. Daraus erhalten wir nämlich sehr rasch eine Antwort auf unsere eigentliche Frage nach dem Antriebsmoment M . Bei diesem Bewegungszustand rollen beide Räder mit der Rotationsschnelligkeit $\omega = v/r$ um ihre jeweiligen Auflagepunkte, und der Wagenkasten macht eine Translationsbewegung mit der Schnelligkeit v . Die Normal- und die Haftreibungskräfte leisten also nichts. Hingegen leisten die Rollwiderstandsmomente $-\omega M_{f1}$ bzw. $-\omega M_{f2}$ und die Gewichtskraft $-vG \sin \alpha$.

Interessant und lehrreich ist die Leistung des Antriebsmoments: Das (für das Gesamtsystem) innere Moment am Hinterrad leistet bei der Rotation des Hinterrades ωM , während die Reactio dazu, also das Moment am Wagenkasten, bei der Translation des Wagenkastens nichts leistet. Die Gesamtleistung ist also für die stationäre Bewegung

$$\mathcal{P} = -\omega M_{f1} - \omega M_{f2} - vG \sin \alpha + \omega M = 0 .$$

7. Die aus der Leistungsrechnung gewonnene Gleichung löst sofort unsere erste Fragestellung:

$$M = M_{f1} + M_{f2} + Gr \sin \alpha .$$

Das Antriebsmoment muss also die Rollwiderstandsmomente «kompensieren» und für die Überwindung der Gewichtskraftkomponente in Fahrtrichtung sorgen.

Die Auflösung der Gleichungen nach allen Unbekannten ergibt schliesslich:

$$N_1 = \frac{G}{a+b}((b + \mu_2) \cos \alpha + r \sin \alpha) , N_2 = \frac{G}{a+b}((a - \mu_2) \cos \alpha - r \sin \alpha) ,$$

$$M_1 = \frac{G\mu_2}{a+b}((b + \mu_2) \cos \alpha + r \sin \alpha) , M_2 = \frac{G\mu_2}{a+b}((a - \mu_2) \cos \alpha - r \sin \alpha) ,$$

$$M = G(\mu_2 \cos \alpha + r \sin \alpha) ,$$

$$F_1 = \frac{G}{a+b} \left(\frac{\mu_2}{r} (a - \mu_2) \cos \alpha + (a + b - \mu_2) \sin \alpha \right) , F_2 = \frac{G}{a+b} \left(\frac{\mu_2}{r} (\mu_2 - a) \cos \alpha + \mu_2 \sin \alpha \right) .$$

8. Um die maximale Steigung zu ermitteln, müssen wir die Positivität der Normalkräfte und die Haftreibungsgesetze überprüfen. Eigentlich genügt es, die Haftreibungsgesetze zu betrachten, weil diese bei negativer Normalkraft automatisch verletzt sind. In unserem Beispiel ist aber das interessante Haftreibungsgesetz (am Antriebsrad) etwas unübersichtlich. Deshalb betrachten wir separat auch die etwas einfacheren Ungleichungen für die Normalkräfte.

Beim Antriebsrad erhalten wir

$$(b + \mu_2) \cos \alpha + r \sin \alpha \geq 0, \text{ bzw.: } \tan \alpha \geq -\frac{(b + \mu_2)}{r}.$$

Diese Ungleichung kann nur bei einer Talfahrt ($\alpha < 0$) verletzt werden. Dann entspricht sie dem Kippen des Fahrzeugs, weil die Wirkungslinie der Gewichtskraft vor dem Angriffspunkt der Normalkraft des Rades zu liegen kommt. (Das Rollwiderstandsmoment kann als Verschiebung des Angriffspunktes der Normalkraft verstanden werden.)

Beim frei laufenden Rad haben wir eine analoge Bedingung für Fahrbahnkontakt ($N_2 \geq 0$), welche nur bei Bergfahrt verletzt werden kann:

$$(a - \mu_2) \cos \alpha - r \sin \alpha \geq 0, \text{ bzw.: } \tan \alpha \leq \frac{a - \mu_2}{r}.$$

An diesem Rad können wir das Haftreibungsgesetz einfach diskutieren, es ist nämlich

$$F_2 = -\frac{\mu_2}{r} N_2.$$

Das bedeutet einerseits, dass die Reibungskraft nicht in die eingezeichnete Richtung, sondern entgegen der Fahrtrichtung zeigt. Das entspricht auch der Intuition, weil die Haftreibungskraft hier dafür sorgen muss, dass sich das durch den Rollwiderstand gehemmte Rad dreht. Die Haftreibungsbedingung $|F_2| \leq \mu_0 N_2$ reduziert sich auf $\mu_0 \geq \mu_2/r$, was wohl meistens gegeben ist.

Am Antriebsrad ergibt sich, wenn wir F_1 als positiv annehmen:

$$\tan \alpha \leq \frac{br\mu_0 + \mu_2(-a + r\mu_0 + \mu_2)}{r(a + b - r\mu_0 - \mu_2)}.$$

In dieser Ungleichung ist sowohl die Lage des Massenmittelpunktes als auch der Haftreibungskoeffizient wichtig.

In *reibungsbehafteten Gelenken* tritt **Lagerreibung** auf. Hier betrachten wir den Lagermittelpunkt als Bezugspunkt und führen dort eine vollständige Dynamik ein, bestehend aus der **Zapfenkraft** mit Komponenten A und B und dem Moment M_f . Der Laggerradius sei r_l . Die Reibungsgesetze verbinden das Reibungsmoment M_f mit der Zapfenkraft. Ihre Herleitung ist einfach, sie enthält aber eine starke Vereinfachung:

Man betrachtet die Kontaktstelle von Lagerhülse und Zapfen und zerlegt die dort auftretende Kraft in eine Normal- und eine Reibungskraftkomponente. Das Haft- (2.17) bzw. Gleitreibungsgesetz (2.18) liefert direkt einen Zusammenhang zwischen den beiden Komponenten. Wenn man darin die Normalkraft mit der gesamten Zapfenkraft identifiziert, so ergibt sich

- im Fall der Ruhe:

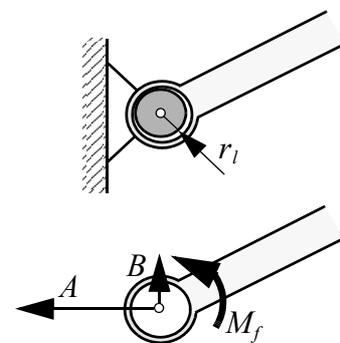
$$|M_f| \leq \mu_0 r_l \sqrt{A^2 + B^2}, \quad (2.22)$$

- im Fall der Bewegung:

$$M_f = \pm \mu_1 r_l \sqrt{A^2 + B^2}. \quad (2.23)$$

Kontrollfragen

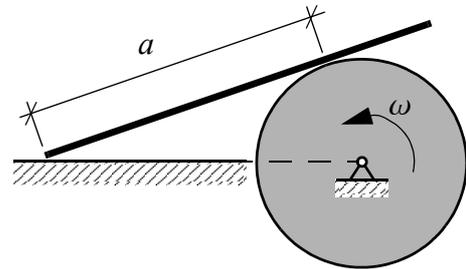
1. Beschreiben Sie die Reibungsgesetze!



2. Liefert das Haftreibungsgesetz eine Gleichung zur Bestimmung der Unbekannten?
3. Liefert das Gleitreibungsgesetz eine Gleichung zur Bestimmung der Unbekannten?
4. Wie sehen die Reibungsgesetze in Lagern aus?

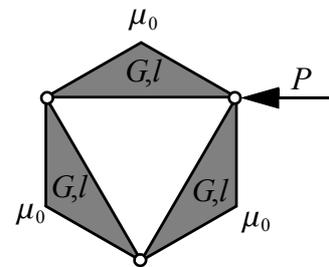
Übungen

1. Ein Balken (Gewicht G_1 , Länge l) liegt links auf einer rauhen Unterlage (Haftreibungskoeffizient μ_{01} , kein Rollwiderstand) und rechts auf einer rotierenden Scheibe (Radius R , Haftreibungskoeffizient μ_{02} zwischen Scheibe und Balken, Gleitreibungskoeffizient μ_{12} , kein Rollwiderstand). Berechnen Sie die am Balken auftretenden Kräfte, wenn dieser im Abstand a von seinem linken Ende auf der Scheibe aufliegt. Wie gross darf a sein?



2. Diskutieren Sie das obige System, falls die Scheibe in Ruhe ist und im Lager keine Reibung herrscht!
3. Diskutieren Sie das obige System, falls die Scheibe (Gewicht G_2) in Ruhe, die linke Auflage reibungsfrei und das Lager der Scheibe mit Reibung behaftet ist (Lagerradius r_l , Haftreibungskoeffizient im Lager μ_{03})!

4. Drei homogene, gleichseitige Dreieckplatten (Gewicht G , Seitenlängen l) sind paarweise in einer Ecke reibungsfrei gelenkig verbunden. Das System wird mit drei Ecken so auf eine horizontale Ebene gestellt, dass seine Projektion auf die Ebene als reguläres Sechseck erscheint (siehe Skizze). Neben den Gewichtskräften wirkt die horizontale Kraft vom Betrag P . Der Haftreibungskoeffizient zwischen den Ecken des Systems und der Ebene ist $\mu_0 > \sqrt{2}/4$, die Rollwiderstandslänge null. Für welche Werte der Last P ist Ruhe möglich?



Kapitel 3: Dynamik

Bei einem starren Körper wissen wir, dass er genau dann in Ruhe bleibt, wenn an ihm ein Nullsystem angreift; jede andere Kräftegruppe wird ihn bewegen. In der **Kinetik** stellt man sich die Frage nach dem Zusammenhang zwischen den angreifenden Kräften (bei einem starren Körper also der *Dyname*) und seiner Bewegung (*Kinematik*). Es stellt sich heraus, dass die Kräfte mit der *Änderung* des Bewegungszustandes zusammenhängen, also mit der Änderung der Geschwindigkeiten, also mit den Beschleunigungen.

Das Studium der Beschleunigungen und Geschwindigkeiten bezeichnet man als **Kinematik** (*Geometrie der Bewegungen*). Die Gebiete der Kinetik und der Kinematik zusammen werden auch als **Dynamik** bezeichnet.

3.1 Beschleunigung

Lernziele

- Sie können die Beschleunigung in kartesischen Koordinaten berechnen.
- Sie können die Formel für die Beschleunigung in Zylinderkoordinaten anwenden.
- Sie können die radiale und tangentielle Komponente der Beschleunigung bei einer Kreisbewegung aus dem Kopf anschreiben und erklären.

Zum Verständnis der Bewegung von materiellen Punkten brauchen wir nicht nur die Geschwindigkeit v sondern auch deren Ableitung, die **Beschleunigung** a .

$$\mathbf{a} = \dot{v} = \ddot{\mathbf{r}}. \quad (3.1)$$

In kartesischen Koordinaten erhalten wir für die Beschleunigung sofort

$$\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y + \ddot{z}\mathbf{e}_z. \quad (3.2)$$

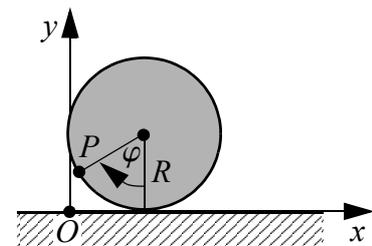
Beispiel: Rollendes Rad

Wir haben auf Seite 7 die kartesischen Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes P schon berechnet:

$$\begin{aligned} x &= R(\varphi - \sin\varphi), \\ v_x &= \dot{x} = R\dot{\varphi}(1 - \cos\varphi), \\ y &= R(1 - \cos\varphi), \\ v_y &= \dot{y} = R\dot{\varphi}\sin\varphi. \end{aligned}$$

Die Beschleunigungskomponenten ergeben sich durch nochmaliges Ableiten:

$$a_x = \ddot{x} = R\ddot{\varphi}(1 - \cos\varphi) + R\dot{\varphi}^2\sin\varphi,$$



$$a_y = \ddot{y} = R\dot{\varphi}\sin\varphi + R\dot{\varphi}^2\cos\varphi.$$

Ein wichtiger Spezialfall liegt vor, falls die *Rotationsschnelligkeit* $\dot{\varphi} = \omega$ konstant ist. Dann vereinfachen sich die Beschleunigungskomponenten zu

$$a_x = \ddot{x} = R\omega^2\sin\varphi,$$

$$a_y = \ddot{y} = R\omega^2\cos\varphi.$$

Der Betrag der Beschleunigung ist in diesem Fall konstant:

$$|a| = R\omega^2.$$

Wir beachten speziell, dass der Auflagepunkt des Rades ($\varphi = 0$) zwar momentan in Ruhe ist, aber trotzdem eine nichtverschwindende Beschleunigung hat!

Wie schon die Geschwindigkeiten (siehe Seite 8) sind auch die Beschleunigungen in nicht-kartesischen Koordinaten wesentlich komplizierter als (3.2). Trotzdem ist es sinnvoll, die Koordinaten dem Problem angepasst zu wählen, da die einmal berechneten Formeln für die Beschleunigungen bei jeder weiteren Rechnung mit denselben Koordinaten nur noch eingesetzt werden müssen.

Wir beschränken uns hier auf die Zylinder- und die daraus einfach ableitbaren Polarkoordinaten.

Beschleunigung in Zylinderkoordinaten:

Wenn wir die Koordinaten-Einheitsvektoren in kartesischen Koordinaten schreiben, so können wir auf einfache Weise deren Ableitungen berechnen:

$$\mathbf{e}_\rho = \cos\varphi\mathbf{e}_x + \sin\varphi\mathbf{e}_y,$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\mathbf{e}_x + \cos\varphi\mathbf{e}_y$$

und erhalten damit

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi,$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\mathbf{e}_\rho,$$

$$\dot{\mathbf{e}}_z = \mathbf{0}.$$

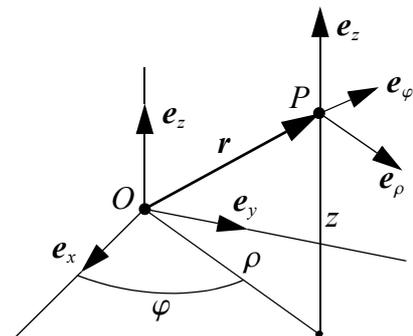
Die Geschwindigkeit haben wir in (1.6) schon berechnet:

$$\mathbf{v} = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \dot{z}\mathbf{e}_z.$$

Nochmaliges Ableiten liefert:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\dot{\mathbf{e}}_\varphi + \ddot{z}\mathbf{e}_z + \dot{z}\dot{\mathbf{e}}_z,$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi + \ddot{z}\mathbf{e}_z. \quad (3.3)$$



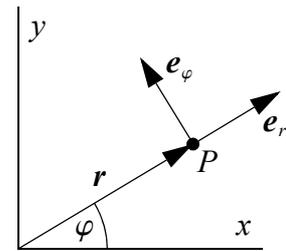
Beschleunigung in ebenen Polarkoordinaten:

Um aus (3.3) die Formeln für Polarkoordinaten zu erhalten, müssen wir ρ durch r ersetzen und z konstant halten. Die Geschwindigkeit hatten wir auch schon in (1.8)

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi.$$

Die Beschleunigung wird

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi. \quad (3.4)$$

**Beispiel: Kreisbewegung**

Als Spezialfall von (3.4) kommt in vielen Anwendungen die *Kreisbewegung* vor. Um die Beschleunigung zu erhalten, müssen wir r konstant halten:

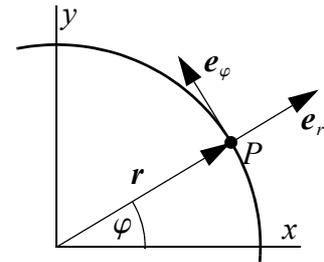
$$r = \text{konst.}$$

Hier ist die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$$

und die Beschleunigung

$$\mathbf{a} = -r\dot{\varphi}^2\mathbf{e}_r + r\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi. \quad (3.5)$$



Die Beschleunigung bei einer Kreisbewegung hat also eine radial nach innen gerichtete Komponente vom Betrag

$$r\dot{\varphi}^2 = \frac{v^2}{r}$$

und eine tangentielle (in positiver φ -Richtung positiv gerechnet) vom Betrag $r\ddot{\varphi}$. Dieser Sachverhalt gehört zur minimalen Mechanik-Bildung und sollte jederzeit «aus dem Kopf» verfügbar sein!

Kontrollfragen

1. Wie ist die Beschleunigung definiert?
2. Welches sind die Komponenten des Beschleunigungsvektors in kartesischen Koordinaten?
3. Welches sind die Komponenten der Beschleunigung in ebenen Polarkoordinaten?
4. Welches sind die Komponenten der Beschleunigung für eine gleichförmige Kreisbewegung?
5. Wann fällt man im Tram beinahe um?

Übung

1. Zeigen Sie, dass bei der Bewegung

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha,$$

$$y(t) = 0,$$

$$z(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2$$

(schiefer Wurf) der Beschleunigungsvektor konstant ist. Bestimmen Sie Wurfhöhe und Wurfweite in Funktion der Anfangsgeschwindigkeit v_0 und der Elevation α !

3.2 Trägheitskräfte, Prinzip der virtuellen Leistungen

Lernziele

- Sie können Trägheitskräfte von wirklichen Kräften unterscheiden und kennen deren Definition.
- Sie kennen das Prinzip der virtuellen Leistungen als Grundlage für die Kinetik.
- Sie können die besprochenen Beispiele ihrem Banknachbarn erklären.
- Sie können Inertialsysteme charakterisieren.

Ausgangspunkt ist unser bewährtes *Prinzip der virtuellen Leistungen* (2.13). Damit wir auch *beschleunigte* Bewegungen einbeziehen können, müssen wir – nach einer Idee von *d'Alembert* (1743) – fiktive *Trägheitskräfte* einführen. Wir definieren vorerst die **Trägheitskraftdichte**:

$$\mathbf{f}^{(t)} = -\rho \mathbf{a}. \quad (3.6)$$

Die darin auftretende **spezifische Masse** ρ (**Dichte**, Masse pro Volumeneinheit) ist eine charakteristische Grösse der Materie. Sie ist eine Funktion des Ortes: $\rho = \rho(\mathbf{r})$. Für ein infinitesimales Volumenelement dV können wir ein *infinitesimales Element* der **Trägheitskraft** berechnen:

$$d\mathbf{F}^{(t)} = -\rho \mathbf{a} dV = -\mathbf{a} dm. \quad (3.7)$$

☞ *Die Trägheitskräfte sind fiktive und nicht reale Kräfte. Sie verletzen das Reaktionsprinzip!*

Bei virtuellen Bewegungen (die wieder keinen Zusammenhang mit den wirklichen Bewegungen haben müssen!) lassen sich auch für die Trägheitskräfte virtuelle Leistungen berechnen. Wir bezeichnen sie mit $\tilde{\mathcal{P}}^{(t)}$.

Mit diesen Definitionen lässt sich das PdvL folgendermassen verallgemeinern:

Prinzip der virtuellen Leistungen

Die Gesamtleistung aller wirklichen Kräfte und aller (für die Beschleunigungen der wirklichen Bewegung berechneten) Trägheitskräfte verschwindet für jeden virtuellen Bewegungszustand.

Formal können wir diesen Sachverhalt auch so formulieren:

$$\tilde{\mathcal{P}}^{(i)} + \tilde{\mathcal{P}}^{(a)} + \tilde{\mathcal{P}}^{(t)} = 0, \forall \{\tilde{\mathbf{v}}\}. \quad (3.8)$$

Wie schon die ursprüngliche Formulierung (2.15) des PdvL lässt sich auch (3.8) nicht herleiten, sondern nur mit Experimenten an der Natur bestätigen (oder verwerfen).

Alternativ dazu könnten wir aber z.B. auch vom *Newtonschen Gesetz* ausgehen (siehe Abschnitt 3.3 auf Seite 80), und historisch ist das PdvL daraus entstanden. Der Vorteil des PdvL

gegenüber dem Newtonschen Gesetz liegt darin, dass es sofort auch für starre oder deformierbare Körper, Flüssigkeiten, Gase etc. anwendbar ist.

Weil wir das Prinzip der virtuellen Leistungen nur für theoretische Überlegungen verwenden werden, verzichten wir auf ein konkretes Anwendungsbeispiel.

Wir beachten aber schon hier, dass bei verschwindenden Beschleunigungen, also z.B. im Fall der Ruhe, auch die Trägheitskräfte (3.6) bzw. (3.7) verschwinden. Dann ist also auch ihre virtuelle Leistung null. Und damit erhalten wir als Spezialfall das aus der *Statik* bekannte Prinzip (2.15) zurück.

Auch *geradlinig gleichförmige* Bewegungsanteile ($\mathbf{v} = \mathbf{konst.}$ im ruhenden System, z.B. bezüglich der Sonne) liefern keinen Anteil an die Trägheitskräfte, da die Beschleunigung \mathbf{a} in (3.6) bzw. (3.7) verschwindet. Umgekehrt betrachtet spielt es also auch keine Rolle, wenn sich das Bezugssystem mit (vektoriell) konstanter Geschwindigkeit bewegt. Alle mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Systeme sind also gleichwertig und liefern dieselben Gleichungen. Sie heißen *Inertialsysteme*.

Inertialsysteme können alternativ dazu auch durch die Eigenschaft definiert werden, dass in ihnen das PdvL gilt. Dann braucht man den problematischen Begriff des ruhenden Systems nicht.

Aus (3.7) und (3.8) sehen wir auch, dass *masselos modellierte Teilsysteme* keinen Beitrag zur virtuellen Leistung der Trägheitskräfte $\mathcal{P}^{(t)}$ liefern. In masselosen Teilsystemen kann also mit den Methoden der Statik gerechnet werden. Diese Modellannahme vereinfacht die Rechnungen erheblich, muss aber natürlich gerechtfertigt sein (siehe *Beispiel: Zwei Körper* auf Seite 88).

Kontrollfragen

1. Wie ist die Trägheitskraftdichte definiert?
2. Wie berechnet sich ein differentielles Element $d\mathbf{F}^{(t)}$ der Trägheitskraft?
3. Wie lautet das Prinzip der virtuellen Leistungen in seiner verallgemeinerten Form (für Bewegungen)?
4. Hängen die in den Trägheitskräften vorkommenden Beschleunigungen mit den im PdvL verwendeten Geschwindigkeiten zusammen?
5. Was ist ein Inertialsystem?

3.3 Newtonsches Bewegungsgesetz

Lernziele

- Sie wissen, wann ein System als Massenpunkt modelliert werden kann.
- Sie können mit dem Newtonschen Bewegungsgesetz Anfangswertprobleme für Massenpunkte und Systeme von Massenpunkten herleiten sowie Bindungskräfte berechnen. Dabei verwenden Sie zielführende Lösungsschritte (von der Modellbildung über das Freischneiden, das Aufstellen von kinematischen Relationen, das Newtonsche Bewegungsgesetz bis zur Diskussion der Resultate).
- Sie kennen die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen, die bei konstanten oder auslenkungsproportionalen Kräften entstehen.

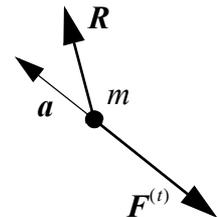
Wir werden nun das PdvL auf Massenpunktmodelle anwenden und daraus das *Newtonsche Gesetz* herleiten.

Ein **Massenpunkt** ist ein Körper, der sich (für eine gegebene Problemstellung) als materieller Punkt modellieren lässt. Dazu müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

- eventuelle Rotationen und Deformationen des Körpers interessieren nicht,
- eventuelle Rotationen und Deformationen des Körpers verändern die Resultierende der äusseren Kräfte nicht.

Wir reduzieren alle am Massenpunkt angreifenden Kräfte auf ihre Dyname, wobei nur die Resultierende \mathbf{R} der äusseren Kräfte eine Rolle spielen wird. Die Trägheitskraft am Massenpunkt ergibt sich durch Integration über den materiellen Punkt zu

$$\mathbf{F}^{(t)} = \int d\mathbf{F}^{(t)} = -\int \mathbf{a} dm = -m\mathbf{a}.$$



Wir werden in Abschnitt 3.4 sehen, dass das Integral über die Trägheitskräftelemente auch bei einem ausgedehnten Körper so berechnet werden kann, sofern man den Massenpunkt im *Massenmittelpunkt* des Körpers ansetzt.

Für alle virtuellen Translationen mit Geschwindigkeit $\tilde{\mathbf{v}}$ muss also

$$\tilde{\mathcal{P}}^{(i)} + \tilde{\mathcal{P}}^{(a)} + \tilde{\mathcal{P}}^{(t)} = (\mathbf{R} - m\mathbf{a}) \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0$$

sein. Weil $\tilde{\mathbf{v}}$ beliebig gewählt werden kann, folgt daraus das *Newtonsche Gesetz*

$$\boxed{m\mathbf{a} = \mathbf{R}}. \quad (3.9)$$

Die Vektoren der Beschleunigung und der Resultierenden sind also in Tat und Wahrheit parallel, so wie rechts skizziert.



☞ *In dieses Gesetz geht die Resultierende der wirklichen äusseren Kräfte ein. In diesem Kontext gibt es keine Trägheitskräfte mehr!*

Newton (1642-1727) hatte in seiner Arbeit die Änderung des Impulses $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ betrachtet:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}.$$

Dieser Ansatz hat sich bei *relativistischen* Berechnungen als sehr nützlich erwiesen.

Um die Lösung der **Bewegungsdifferentialgleichung** (**Bewegungsgleichung**) eindeutig festzulegen, braucht man auch noch **Anfangsbedingungen**:

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0 \text{ und } \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0. \quad (3.10)$$

Das Newtonsche Gesetz definiert also mit den Anfangsbedingungen (3.10) zusammen ein **Anfangswertproblem**.

Beispiel: Quader auf rauher, schiefer Ebene

Ein Quader der Masse m wird zur Zeit $t = 0$ auf einer schiefer Ebene (Neigungswinkel α , trockene Reibung mit Haftreibungskoeffizient $\mu_0 < \tan\alpha$ und Gleitreibungskoeffizient $\mu_1 < \mu_0$) aus der Ruhe losgelassen. Wegen des kleinen Haftreibungskoeffizienten wird der Körper zu rutschen beginnen (siehe *Beispiel: Rad auf schiefer Ebene* auf Seite 70).

Wir nehmen an, dass der Körper in einer ebenen Bewegung gleitet und nicht umkippt. Dann spielt der genaue Angriffspunkt der Kräfte (v.a.: Normalkraft) keine Rolle und das Modell eines Massenpunkts ist angebracht.

Unsere Koordinaten wählen wir so, dass der Massenpunkt zur Zeit $t = 0$ im Ursprung O liegt. Dann zeichnen wir *in einer beliebigen Lage* die am Körper angreifenden äusseren Kräfte (siehe Skizze): Gewichtskraft (Betrag mg), Normalkraft (N), Gleitreibungskraft (F). Der genaue Angriffspunkt der Normalkraft kann und soll uns in diesem Massenpunktmodell nicht interessieren. (In der Dynamik ist es sinnvoll, die Gewichtskraft direkt als Masse (m) mal Erdbeschleunigung (g) zu schreiben, weil die entstehenden Gleichungen oft mit m gekürzt werden können.)

Nun formulieren wir das Newtonsche Gesetz (3.9) komponentenweise in x - und y -Richtung. In x -Richtung ist die Beschleunigungskomponente eine Unbekannte:

$a_x = \ddot{x}$. Die rechte Seite der Gleichung besteht aus den x -Komponenten der beiden Kräfte. Also ergibt sich

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - F. \quad (3.11)$$

In y -Richtung ist die Bewegung an die schiefe Ebene gebunden. Die y -Koordinate ist also konstant und deshalb verschwindet die Beschleunigung: $a_y = 0$. Also haben wir

$$0 = N - mg\cos\alpha,$$

bzw.

$$N = mg\cos\alpha. \quad (3.12)$$

Gleichung (3.11) in der ungebundenen Richtung wird uns erlauben, die unbekannte Bewegung des Systems, also $x(t)$ zu bestimmen. Gleichung (3.12) entspricht der Statik und liefert nichts Neues (siehe Abschnitt 3.2).

Welches sind die Unbekannten in unserem Problem? Genau wie in der Statik kennen wir die Bindungskräfte N und F nicht. Zudem ist aber auch die Bewegung $x(t)$ des Körpers unbekannt. Damit liegen also drei Unbekannte vor. Bisher haben wir zwei Gleichungen (eine Differentialgleichung und eine algebraische Gleichung). Als dritte Gleichung können und müssen wir noch das Gleitreibungsgesetz (2.18) zuziehen. Zusammen mit (3.11) ergibt sich

$$F = \mu_1 N = \mu_1 mg\cos\alpha. \quad (3.13)$$

Damit sind die Kräfte F und N bestimmt.

Nun konzentrieren wir uns auf das Neue. Mit eingesetztem Resultat (3.13) sagt (3.11):

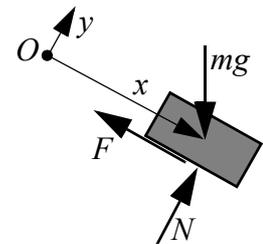
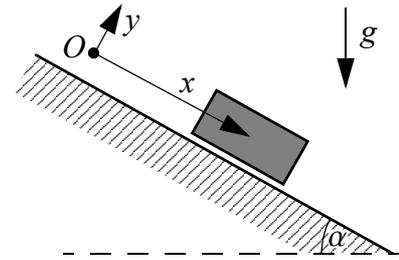
$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - \mu_1 mg\cos\alpha. \quad (3.14)$$

Das ist eine *Differentialgleichung zweiter Ordnung* (wegen der zweiten Ableitung), welche die Beschleunigung \ddot{x} mit den Kräften verknüpft. Wir nennen sie **Bewegungsdifferentialgleichung** oder **Bewegungsgleichung**. Nach einer Division durch m (siehe die unten stehende Bemerkung) vereinfacht sich die Gleichung noch weiter:

$$\ddot{x} = g(\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha). \quad (3.15)$$

Gemäss der Voraussetzung $\mu_1 < \mu_0 < \tan\alpha$ ist der Klammerausdruck auf der rechten Seite positiv, die Beschleunigung also immer positiv. Die Situation in Gleichung (3.15) ist speziell einfach, weil die Kräfte nicht von x oder \dot{x} abhängig sind; auf der rechten Seite steht eine Konstante. Deshalb können wir beide Seiten der Gleichung zweimal nach der Zeit integrieren:

$$x(t) = \frac{g}{2}(\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha)t^2 + c_1 t + c_2.$$



Die beiden Integrationskonstanten c_1 und c_2 sind durch die *Anfangsbedingungen* bestimmt. Gemäss Voraussetzung ist nämlich

$$x(0) = 0 \text{ und } \dot{x}(0) = 0.$$

Daraus folgt, dass

$$c_1 = 0 \text{ und } c_2 = 0$$

sein muss, womit sich die Bewegung

$$x(t) = \frac{g}{2}(\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha)t^2$$

ergibt.

Bemerkung

Die Massen m links und rechts in Gleichung (3.14) haben eigentlich eine verschiedene Bedeutung: Links steht die **träge Masse**, welche zur Trägheitskraft gehört; rechts aber steht die **schwere Masse**, welche zum Gravitationsgesetz gehört. Schon *Newton* suchte experimentell nach einem Unterschied zwischen diesen beiden Grössen – und fand keinen. *Eötvös* konnte 1889 zeigen, dass das Verhältnis der beiden Massen für verschiedene Substanzen höchstens 10^{-9} von eins abweicht; modernere Messungen haben diese Schranke noch wesentlich verkleinert. *Einstein* postulierte in seinem **Äquivalenzprinzip** die Gleichheit der beiden Massen. Das ist ein Hauptfundament der *Allgemeinen Relativitätstheorie* (1916).

Beispiel: Mathematisches Pendel

Ein kleiner starrer Körper der Masse m ist an einem masselosen (undehnbaren) Faden der Länge l befestigt. Wir nehmen an, die Bewegung finde reibungsfrei in einer Vertikalebene statt. Weil Rotationen und Deformationen des Körpers nicht interessieren und keine wesentliche Wirkung auf die Resultierende Kraft haben, modellieren wir den Körper als Massenpunkt.

Gesucht ist seine Bewegung.

Wir zeichnen das System in einer beliebigen Lage beschrieben durch den Winkel φ . Der Massenpunkt bewegt sich auf einer Kreisbahn. Deshalb kennen wir die Komponenten seiner Beschleunigung in tangentialer (e_φ) und radialer (e_r) Richtung, siehe (3.5):

$$a_\varphi = l\ddot{\varphi},$$

$$a_r = -l\dot{\varphi}^2.$$

Als Kräfte greifen am Körper die Gewichtskraft G (vertikal nach unten vom Betrag mg) und die unbekannte Fadenkraft S an.

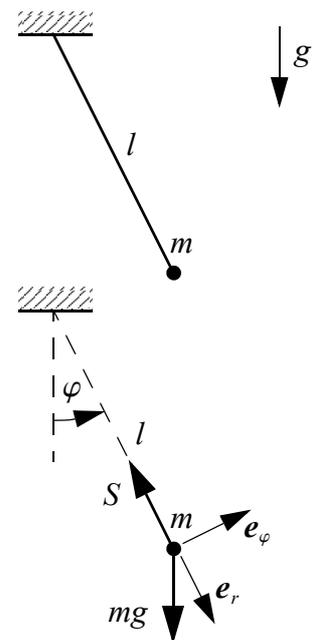
Jetzt formulieren wir das Newton'sche Gesetz in tangentialer und radialer Richtung:

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi, \tag{3.16}$$

$$-ml\dot{\varphi}^2 = mg\cos\varphi - S. \tag{3.17}$$

Die erste Gleichung ist als Bewegungsdifferentialgleichung zu interpretieren, aus der man (bei gegebenen Anfangsbedingungen) im Prinzip die unbekannte Funktion $\varphi(t)$ bestimmen kann. Meist dividiert man durch m und l und schreibt

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0. \tag{3.18}$$



Falls es gelingen würde, $\varphi(t)$ einfach zu ermitteln, so könnte man die Funktion ableiten und quadrieren und aus (3.17) den Zeitverlauf der Fadenkraft $S(t)$ berechnen:

$$S(t) = mg \cos \varphi + ml \dot{\varphi}^2. \quad (3.19)$$

Leider ist die Differentialgleichung (3.18) aber nichtlinear; ihre Diskussion würde den Rahmen dieser Vorlesung sprengen. Nur zwei sehr spezielle, nämlich konstante, Lösungen sind sofort ersichtlich:

$$\varphi(t) = \varphi_1 = 0 \text{ und } \varphi(t) = \varphi_2 = \pi.$$

Das sind die beiden **Ruhelagen** des Systems.

Ansonsten müssen wir uns mit einer approximativen Lösung begnügen, welche für *kleine Auslenkungen* ($\varphi \ll 1$) Sinn macht. In diesem Fall können wir $\sin \varphi$ durch φ selbst approximieren und erhalten mit der Abkürzung

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

die viel einfachere, lineare Differentialgleichung:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0. \quad (3.20)$$

Diese Differentialgleichung wird z.B. durch die Funktionen $\sin \omega t$ und $\cos \omega t$ gelöst, wie man durch zweimaliges Ableiten nach der Zeit und Einsetzen in (3.20) verifizieren kann. Auch wenn wir die beiden Ansatzfunktionen mit Konstanten multiplizieren und zueinander addieren, löst diese *Linearkombination* immer noch (3.20). Als allgemeine Lösung können wir also eine harmonische Schwingung der Form

$$\varphi(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) \quad (3.21)$$

ansetzen.

Erst bei gegebenen *Anfangsbedingungen* für Winkel und Winkelschnelligkeit wird die Lösung eindeutig, d.h., die Konstanten c_1 und c_2 sind durch Gleichungen festgelegt. Wir wählen z.B.

$$\varphi(0) = \varphi_0 \text{ und } \dot{\varphi}(0) = 0 \quad (3.22)$$

und erhalten dann

$$c_1 = \varphi_0 \text{ und } c_2 = 0.$$

Die Schwingung hat in diesem Fall die **Amplitude** φ_0 und wird beschrieben durch die Zeitfunktion

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t). \quad (3.23)$$

Die Grösse

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (3.24)$$

heisst **Kreisfrequenz** der Schwingung. Aus (3.23) oder (3.21) sehen wir, dass die **Periode** T einer Schwingung

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

beträgt. Für kleine Auslenkungen ist die Periode – etwas überraschend – *unabhängig* von der Anfangsauslenkung φ_0 ; darauf beruht die Funktion von Pendeluhren. Für grosse Auslenkungen stimmt das allerdings nicht: Wir können annehmen, dass wir statt des Fadens einen Stab mit vernachlässigbarer Masse haben, der auch Druckkräfte aufnehmen kann. Dann lässt sich mathematisch zeigen, dass die Periode beliebig gross gemacht werden kann, indem man φ_0 nahe bei π wählt. Auch experimentell ist die Zunahme der Periode mit der Auslenkung offensichtlich.

Bei gegebenem $\varphi(t)$ können wir $\dot{\varphi}(t)$ berechnen, in (3.19) einsetzen und damit S ermitteln:

$$S(t) = m(l\omega^2 \varphi_0^2 \sin^2 \omega t + g \cos \varphi) = mg(\varphi_0^2 \sin^2 \omega t + \cos(\varphi_0 \cos \omega t)).$$

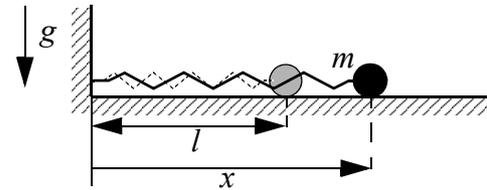
Beispiel: Federschwinger

Eine (lineare) Feder übt bei einer Verlängerung um δl aus der ungespannten Lage eine Kraft vom Betrag

$$|F| = c|\delta l| \quad (3.25)$$

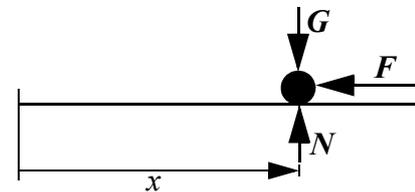
auf den Körper aus, an dem sie befestigt ist. Bei einer Verlängerung ($\delta l > 0$) ist die Kraft am Körper in Richtung Feder gerichtet: die Feder zieht am Körper. Bei Verkürzung der Feder ($\delta l < 0$) wirkt die Kraft von der Feder weg: die Feder drückt auf den Körper. Gleichung (3.25) ist das (lineare) **Federgesetz**, die Konstante c heisst **Federkonstante** oder **Federsteifigkeit**.

Wir betrachten einen Massenpunkt m , der reibungsfrei auf einer Horizontalebene gleitet. Er ist über eine Feder (ungespannte Länge l , Federkonstante c) an einer Wand befestigt. Zur Zeit $t = 0$ wird er aus der Lage mit x -Koordinate $l + d$ aus der Ruhe losgelassen. Uns interessiert seine Bewegung.



Wir skizzieren das System in einer allgemeinen Lage (mit Auslenkung $x(t)$) und führen hier die am Massenpunkt angreifenden Kräfte ein.

In vertikaler Richtung greifen die Gewichtskraft $G = mg$ und die Normalkraft N am Massenpunkt an. Das Newtonsche Gesetz (bzw. die Gleichgewichtsbedingung) in vertikaler Richtung zeigt, dass die Normalkraft den Betrag $N = mg$ hat.



Für die Bewegung entscheidend ist die horizontale Richtung, wo einzig die Federkraft F angreift. Sie zeigt in Federrichtung zur ungespannten Lage hin, ihr Betrag ist proportional zur Verlängerung ($\delta l = x - l$). Wenn wir die x -Komponente der Federkraft als $-c(x - l)$ schreiben, so stimmt das sowohl für $x \geq l$ als auch für $x < l$. Also sieht die x -Komponente des Newtonschen Gesetzes folgendermassen aus:

$$m\ddot{x} = -c(x - l). \quad (3.26)$$

Die Anfangsbedingungen lauten:

$$x(0) = l + d \text{ und } \dot{x}(0) = 0.$$

Die Umrechnung auf Koordinaten, welche ihren Ursprung in der ungespannten Lage haben, vereinfacht unsere Gleichungen. Wir setzen $\xi = x - l$. Damit ergibt sich

$$m\ddot{\xi} = -c\xi$$

bzw.

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0 \quad (3.27)$$

mit

$$\omega^2 = \frac{c}{m}.$$

Die Anfangsbedingungen lauten

$$\xi(0) = d \text{ und } \dot{\xi}(0) = 0.$$

Diese Gleichungen entsprechen denjenigen des linearisierten Pendels (siehe (3.20)). Wir verwenden also wieder den Ansatz (3.21) und erhalten, wie in (3.23),

$$\xi(t) = d \cos(\omega t) \text{ bzw. } x(t) = l + d \cos(\omega t).$$

Das gleiche Resultat hätte sich auch bei direkter Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung (3.26) mit den in der Analysis besprochenen Methoden ergeben

Die Lösung ist also eine *harmonische Schwingung* um die Ruhelage $x = l$ bzw. $\xi = 0$.

Falls die Masse nicht an der Wand anschlagen soll ($x > 0$), so müssen wir dafür sorgen, dass $|d| < l$ ist.

Beispiel: Vertikaler Wurf mit Reibung

Ein Massenpunkt mit Masse m wird mit vertikaler Anfangsgeschwindigkeit vom Betrag v_0 nach oben geschossen. Ausser der Gewichtskraft mg wirke an ihm noch eine zur Schnelligkeit proportionale Reibungskraft λv .

Gesucht ist die Bewegung des Massenpunktes.

Da nur vertikale Kräfte angreifen, können wir den Freiheitsgrad als eins annehmen und z.B. die z -Koordinate zur Beschreibung der Lage verwenden.

Das Newtonsche Gesetz für den Massenpunkt liefert

$$m\ddot{z} = -\lambda\dot{z} - mg.$$

Die Anfangsbedingungen sind

$$z(0) = 0 \text{ und } \dot{z}(0) = v_0.$$

Die Differentialgleichung wird noch etwas einfacher, wenn wir durch m dividieren und die Abkürzung $k = \frac{\lambda}{m}$ einführen:

$$\ddot{z} + k\dot{z} = -g.$$

Um eine Lösung zu finden, setzen wir $v = \dot{z}$. Damit ergibt sich die Gleichung

$$\dot{v} + kv = -g.$$

Sie ist erster Ordnung und separierbar:

$$\frac{dv}{g + kv} = -dt.$$

Diese Gleichung lässt sich integrieren:

$$\int \frac{dv}{g + kv} = \frac{1}{k} \log(g + kv) = -t + c_0.$$

Darauf wenden wir die Exponentialfunktion an und lösen nach v auf:

$$v(t) = c_1 e^{-kt} - \frac{g}{k}.$$

Die Grösse c_1 berechnet sich eigentlich aus der ursprünglichen Integrationskonstanten c_0 . Wir können c_1 aber auch ganz einfach als neue Konstante auffassen und mittels der Anfangsbedingung $v(0) = v_0$ berechnen:

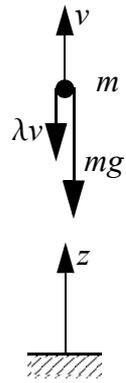
$$c_1 = v_0 + \frac{g}{k} = v_0 + \frac{mg}{\lambda}.$$

Für grosse Zeiten ($t \rightarrow \infty$) ergibt sich der Grenzwert für die Geschwindigkeit zu

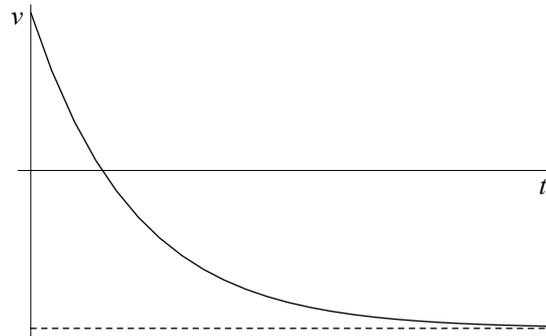
$$-v_\infty = -\frac{mg}{\lambda} = -\frac{g}{k}.$$

Wir können also auch schreiben:

$$v(t) = (v_0 + v_\infty)e^{-kt} - v_\infty.$$



Eine grafische Darstellung von $v(t)$, für den Fall $v_\infty = v_0$, sieht folgendermassen aus:



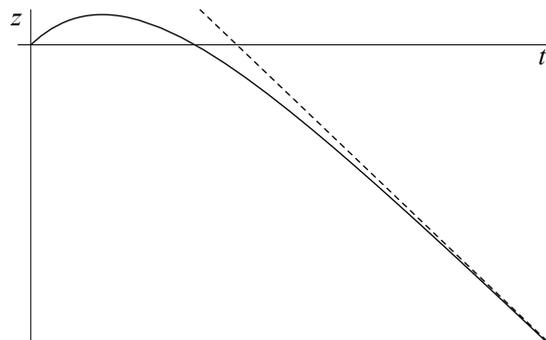
Aus dieser Beziehung für die Geschwindigkeit können wir durch einmalige Integration auch die Lage in Funktion der Zeit ermitteln:

$$z(t) = -(v_0 + v_\infty) \frac{e^{-kt}}{k} - v_\infty t + c_2.$$

Aus der zweiten Anfangsbedingung $z(0) = 0$ wird $c_2 = \frac{v_0 + v_\infty}{k}$ und

$$z(t) = (v_0 + v_\infty) \frac{(1 - e^{-kt})}{k} - v_\infty t.$$

Diese Funktion hat folgendes Aussehen:



Auch mit *Bindungen* versehene Massenpunkte oder *Systeme* aus mehreren verbundenen Massenpunkten können mit dem Newtonschen Gesetz gelöst werden. Und das gleiche Vorgehen wird später auch für verbundene starre Körper zum Einsatz kommen. Wie in der Statik schneidet man die einzelnen Körper frei und ersetzt die Bindungen durch (vorerst unbekannte) Bindungskräfte. Dann formuliert man das Bewegungsgesetz (im Moment: das Newtonsche Gesetz) für jeden Körper separat. Die Kinematik der Bindungen (*kinematische Relationen*) wird in die Beschleunigungsterme eingesetzt. Daraus lassen sich die Bindungskräfte berechnen.

Ein sehr einfacher Fall ist das Auflager (siehe *Beispiel: Quader auf rauher, schiefer Ebene* auf Seite 82). Hier ist die Beschleunigungskomponente senkrecht zur Berührungsebene null. Daraus ergibt sich dieselbe Gleichung für die Normalkraft wie in der Statik. Beim mathematischen Pendel (siehe *Beispiel: Mathematisches Pendel* auf Seite 83) ist die Beschleunigung in radialer Richtung bekannt und daraus kann die Fadenkraft berechnet werden.

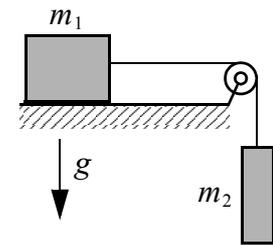
Echte **kinematische Relationen** entstehen, wenn *mehrere* verbundene Körper einzeln freigeschnitten werden. Wir erinnern uns an die Berechnung (1.1) des *Freiheitsgrads*, $f = n - b$, wo die Zahl b der (linear unabhängigen) Bindungsgleichungen von der Summe n der Freiheitsgrade der einzelnen Körper subtrahiert wurde. Wenn man die Bindungsgleichungen durch

Gleichungen zwischen den Ableitungen der Lagekoordinaten schreibt, nennt man sie *kinematische Relationen*. Dank unserer Expertise in Kinematik können wir diese Beziehungen zwischen Geschwindigkeiten und Rotationsgeschwindigkeiten rasch ermitteln!

Die einzelnen Körper unseres Systems werden also durch ihre Lagekoordinaten beschrieben, total n . Für jede Lagekoordinate können wir ein Bewegungsgesetz aufstellen. Zusätzlich haben wir die kinematischen Relationen, total b . Mit den kinematischen Relationen können wir die unbekanntenen Bindungskräfte berechnen und gleichzeitig die Bewegung des Systems durch die minimal nötige Zahl Lagekoordinaten (gemäß Freiheitsgrad!) beschreiben. (Fortgeschrittene Mechaniker mögen verzeihen, dass hier nur holonome, skleronome Bindungen angesprochen werden!)

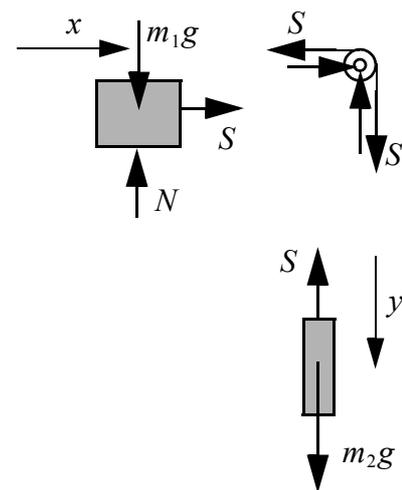
Beispiel: Zwei Körper

Als Beispiel betrachten wir zwei Körper, die als Massenpunkte modelliert werden können. Sie haben die Massen m_1 , m_2 und sind durch ein Seil verbunden. Das masselose, undeformable, immer gespannte Seil läuft über eine Rolle mit vernachlässigbarer Masse. Der Körper mit Masse m_1 gleitet reibungsfrei auf einer Horizontalfläche ohne zu kippen. Der andere Körper hängt frei am Seil und bewegt sich vertikal.



Gesucht sind die Bewegungsdifferentialgleichung und die Seilkraft.

Zur Lösung schneiden wir die beiden Körper und die Rolle frei. Die Koordinaten x und y bezeichnen die Verschiebungen z.B. bezüglich der Anfangslage. Weil wir uns nur für die Differentialgleichung interessieren, müssen die Koordinaten nicht genauer festgelegt werden.



Die *Rolle* ist masselos modelliert. Also wirken an ihr (im PdvL) keine Trägheitskräfte. Die virtuelle Leistung der Trägheitskräfte fällt damit aus dem PdvL, und es ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen der Statik. Eine Momentenbedingung bez. des Rollenmittelpunkts zeigt, dass die Seilkraft im horizontalen und im vertikalen Seilstück gleich ist. Damit ist sie über das ganze (masselose) Seil konstant.

An den beiden massebehafteten *Körpern* formulieren wir das Newtonsche Gesetz:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x} &= S, \\ 0 &= N - m_1 g, \\ m_2 \ddot{y} &= m_2 g - S. \end{aligned}$$

Unbekannt sind die Kräfte N und S sowie die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$. Wir brauchen also noch eine weitere Gleichung, nämlich die kinematische Relation zwischen den Koordinaten x und y . (Eine solche Gleichung muss vorhanden sein, weil das System den Freiheitsgrad eins hat.) Jeder Punkt des Seiles hat die gleiche Schnelligkeit, also gilt die *kinematische Relation*

$$\dot{x} = \dot{y}.$$

Daraus ergeben sich die Lösungen

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \ddot{x} &= m_2 g, \\ N &= m_1 g, \\ S &= \frac{m_1 m_2 g}{(m_1 + m_2)}. \end{aligned}$$

Es zeigt sich also, dass die Seilkraft konstant ist. Sie lässt sich nur durch Trennung des Systems berechnen.

Wir wollen in der folgenden Liste einige Punkte herausstreichen, die bei Problemen der Dynamik beachtet werden müssen. Im Rahmen der gesamten Lösung eines Ingenieurproblems (siehe «Appendix D: Problemlösung» auf Seite 139) sind sie mehrheitlich unter dem 3. Schritt angesiedelt («Lösung konstruieren») und können als Anregung für die Aufteilung in Unterprobleme aufgefasst werden. Eventuell ist die Modellbildung (hier: 1.) allerdings schon bei Schritt 2 («Problem analysieren») erfolgt; die Diskussion der Resultate (hier: 9.) kann auch zu Schritt 4 («Lösung bewerten») gehören.

1. Modellbildung, materielles System abgrenzen.
2. Für die Berechnung von inneren Bindungskräften: einzelne Körper freischneiden.
3. In *allgemeiner Lage* (nicht in der Anfangslage!) alle angreifenden Kräfte einführen.
4. Freiheitsgrad ermitteln, Wahl von zweckmässigen Koordinatensystemen.
5. Kinematische Relationen aufstellen.
6. Bewegungsdifferentialgleichungen für alle Komponenten formulieren.
7. Bindungskräfte bestimmen, aus den Bewegungsgleichungen eliminieren, Anzahl Gleichungen entsprechend reduzieren.
8. Anfangsbedingungen formulieren; gesuchte Grössen berechnen.
9. Resultate diskutieren.

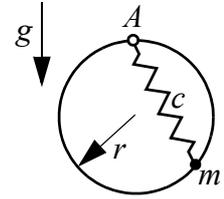
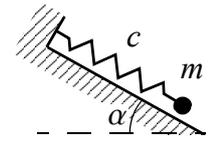
Kontrollfragen

1. Was ist ein Massenpunkt?
2. Wie lautet das Newtonsche Bewegungsgesetz?
3. Was braucht man neben den Bewegungsgleichungen, um die Bewegung eines Massenpunktes (oder Systems) bestimmen zu können?
4. Wie bewegt sich ein kräftefreier Massenpunkt?
5. In welchen Bezugssystemen ist das Newtonsche Bewegungsgesetz gültig?
6. Wie viele (skalare) Anfangsbedingungen müssen für die ebene Bewegung eines Massenpunktes formuliert werden?
7. Wie viele (skalare) Anfangsbedingungen müssen für die Bewegung eines Massenpunktes im Raum formuliert werden?

Übungen

1. Betrachten Sie nochmals das *Beispiel: Quader auf rauher, schiefer Ebene* auf Seite 82. Es sei jetzt $\mu_0 = \mu_1 = \mu$, aber nicht mehr unbedingt $\mu < \tan \alpha$. Es mögen die folgenden Anfangsbedingungen gelten: $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0$.
Welches ist jetzt die Bewegung? Welche Fälle sind möglich? Wann kommt der Körper zur Ruhe?
2. Ein Ball wird zur Zeit $t = 0$ mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 vertikal nach oben geworfen. Die Reibung kann vernachlässigt werden. Ermitteln Sie die Bewegungsdifferentialgleichung und lösen Sie sie!

3. Ein Massenpunkt m ist an einer Feder befestigt und gleitet reibungsfrei auf einer schiefen Ebene. Die Feder übt auf den Massenpunkt eine zur Auslenkung δl entgegengesetzte Kraft vom Betrag $K = c\delta l$ aus (c : Federkonstante). Finden Sie die Kräfte am Massenpunkt und seine Bewegung für den Fall, dass er zur Zeit $t = 0$ an der ungespannten Feder in Ruhe war!
4. Ein Massenpunkt m ist reibungsfrei an eine Kreisbahn in einer Vertikalebene gebunden und an einer Feder (Befestigung in A , ungespannte Länge null, Federkonstante c) befestigt. Formulieren Sie das Newtonsche Gesetz und finde die Bewegungsdifferentialgleichung. Vergleichen Sie mit dem mathematischen Pendel. Wann findet eine Schwingung statt, wann nicht?
5. Wird ein Massenpunkt m im konstanten Schwerfeld mit v_0 nach oben geworfen, so erreicht er bekanntlich die Höhe



$$h_0 = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Aus den Gleichungen von *Beispiel: Vertikaler Wurf mit Reibung* auf Seite 86 folgt bei einer zur Schnelligkeit proportionalen Reibung für die Wurfhöhe

$$h(\epsilon) = 2h_0 \frac{\epsilon - \log(1 + \epsilon)}{\epsilon^2}$$

mit

$$\epsilon = \frac{\lambda v_0}{mg}.$$

Zeigen Sie, dass der Grenzwert von $h(\epsilon)$ für $\epsilon \rightarrow 0$ mit h_0 übereinstimmt und finden Sie für kleine ϵ eine erste Korrektur gemäss

$$h(\epsilon) = (1 - \epsilon \text{ konst.})h_0.$$

6. Ein Massenpunkt m ist an eine Feder (Federkonstante c) gebunden und gleitet über eine raue ($\mu_0 = \mu_1 = \mu$) Horizontalebene. Zur Zeit $t = 0$ befindet er sich in Ruhe und die Feder ist um

$$\delta l = 4.5e$$

verlängert. Dabei ist e eine Abkürzung für die folgende Konstante:

$$e = \frac{\mu mg}{c}$$

Finden Sie die Bewegung des Massenpunktes. Wann und wo bleibt er stehen? Zeichnen Sie seine Auslenkung in Funktion der Zeit!

3.4 Impulssatz, Massenmittelpunktsatz und Drallsatz

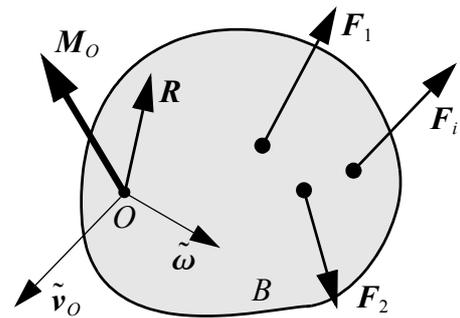
Lernziele

- Sie können den Massenmittelpunktsatz auf konkrete Systeme anwenden.
- Sie können Ihrer Kollegin den Zusammenhang zwischen Massenmittelpunktsatz und Newtonschem Bewegungsgesetz erklären und das Modell des Massenpunktes verständlich machen.
- Sie können Ihrem Kollegen die Lösung des Stossproblems aus dem Skript erläutern.
- Sie verstehen, wie man den Drall bezüglich eines inertialen Punktes berechnet und kennen den zugehörigen Drallsatz.

- Sie verstehen, wie man den relativen Drall (bezüglich des Massenmittelpunktes) berechnet, und Sie kennen den zugehörigen Drallsatz.
- Sie können zwischen relativem Drall und Drall bezüglich eines inertialen Punktes umrechnen.
- Es ist Ihnen bewusst, dass ein konstanter Drall im Raum nicht unbedingt eine konstante Rotationsgeschwindigkeit bedeutet.

In Abschnitt 3.3 haben wir das Prinzip der virtuellen Leistungen (3.8) auf Massenpunkte angewendet und daraus das Newtonsche Bewegungsgesetz (3.9) hergeleitet. In «Appendix B: Zum Energiesatz» wird für die Interessierten gezeigt, wie in der Mechanik der Energiesatz (B.5) folgt, wenn man als virtuellen Bewegungszustand im PdvL die wirkliche Bewegung betrachtet.

Wie in der Statik wollen wir nun das PdvL für eine beliebige virtuelle Starrkörperbewegung formulieren, die wir durch die Kinemate $\{\tilde{\mathbf{v}}_O, \tilde{\boldsymbol{\omega}}\}$ beschreiben. Auf diesem Weg werden wir Bewegungsgesetze erhalten, welche für beliebige starre oder deformierbare Körper gelten: den Impulssatz bzw. Massenmittelpunktsatz und den Drallsatz.



Wir untersuchen also einen materiellen Bereich B (z.B. einen Körper oder ein System), an dem eine beliebige Gruppe von äusseren und inneren Kräften angreift. Die Dynamik dieser Kräftegruppe bezüglich O sei $\{\mathbf{R}, \mathbf{M}_O\}$.

In einem ersten Schritt betrachten wir nur *Translationen* des materiellen Bereichs B und setzen $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$. Damit erhalten wir für die virtuelle Arbeit der äusseren Kräfte

$$\tilde{\mathcal{P}}^{(a)} = \mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_O.$$

Die virtuelle Arbeit $\tilde{\mathcal{P}}^{(i)}$ der inneren Kräfte verschwindet für Starrkörperbewegungen (wegen des Reaktionsprinzips). Für die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte (3.7) erhalten wir

$$\tilde{\mathcal{P}}^{(t)} = \iiint_B (-\mathbf{a} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_O) dm = \left(-\iiint_B \mathbf{a} dm \right) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_O.$$

Also schreibt sich das PdvL (3.8) als

$$\mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_O + \left(-\iiint_B \mathbf{a} dm \right) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_O = 0.$$

Weil $\tilde{\mathbf{v}}_O$ beliebig gewählt werden kann, ergibt sich sofort

$$\iiint_B \mathbf{a} dm = \mathbf{R}. \tag{3.28}$$

Wir definieren nun den **Impuls** \mathbf{p} eines Systems als

$$\mathbf{p} = \iiint_B \mathbf{v} dm \tag{3.29}$$

und erhalten so aus (3.28) den **Impulssatz**

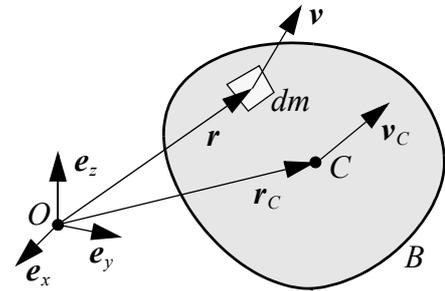
$$\boxed{\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}}. \quad (3.30)$$

Wir erinnern uns an die Beziehung (2.9), mit welcher der Massenmittelpunkt C eines Körpers (oder Systems) berechnet werden kann:

$$m\mathbf{r}_C = \iiint_B \mathbf{r} dm.$$

Diese Gleichung leiten wir (unter Annahme konstanter Masse m) ab und erhalten

$$m\dot{\mathbf{r}}_C = m\mathbf{v}_C = \iiint_B \dot{\mathbf{r}} dm = \iiint_B \mathbf{v} dm = \mathbf{p}. \quad (3.31)$$



Es ist also

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_C).$$

Für ein System mit konstanter Masse m gilt weiter

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_C) = m\mathbf{a}_C.$$

Mit (3.30) ergibt sich der **Massenmittelpunktsatz**:

$$\boxed{m\mathbf{a}_C = \mathbf{R}}. \quad (3.32)$$

Wenn wir also den *Massenmittelpunkt* eines Körpers (oder Systems) mit konstanter Masse betrachten, so bewegt sich dieser gemäss dem Newtonschen Gesetz (3.9), unabhängig von der Grösse und von eventuellen Rotationen und Deformationen. Dabei darf allerdings die Resultierende \mathbf{R} nicht von der Rotation und/oder Deformation abhängen, sonst ergibt sich über die rechte Seite der Gleichung eine Kopplung (Beispiel: durch Luft fallendes Blatt Papier). Somit verstehen wir jetzt die Voraussetzungen für das Massenpunktmodell (siehe Seite 81).

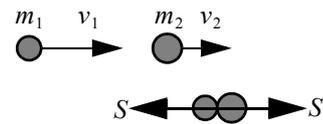
Der Impulssatz (3.30) und der Massenmittelpunktsatz (3.32) gelten beide für einen beliebigen materiellen Bereich. Der Massenmittelpunktsatz ist vor allem dann nützlich, wenn man mit einem einzelnen starren (oder nur schwach deformierbaren) Körper oder mit einem einfachen System aus starren Körpern rechnet, dessen Massenmittelpunkt problemlos ermittelt werden kann. Im Fall von stark deformierbaren Körpern, Flüssigkeiten oder Gasen ist die Formulierung des Impulssatzes geeigneter.

Beispiel: Stoss

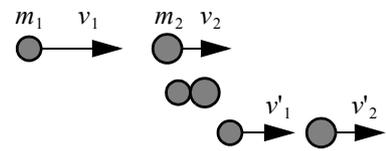
Falls die Resultierende auf der rechten Seite des Impulssatzes (3.30) verschwindet, so ergibt sich ein **Erhaltungssatz**: $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$, also bleibt der Impuls konstant, «erhalten».

Oft kann man durch geeignete Wahl des Systems aus einem Erhaltungssatz nützliche Aussagen gewinnen.

Wir betrachten z.B. die eindimensionale Bewegung von zwei Körpern, welche zusammenstossen. Vor dem Stoss seien die Schnelligkeiten wie skizziert vorgegeben, mit $v_1 > v_2$. Dann kommt es zum Stoss der beiden Körper. Dabei wirkt am linken Körper die nach links gerichtete Normalkraft vom Betrag S (*Stosskraft*) und am rechten Körper die nach rechts gerichtete Reactio dazu. Wir setzen uns nicht zum Ziel, über diese Stosskräfte Aussagen zu machen. Für einen starren Körper werden sie z.B. während eines unendlich kurzen Zeitpunktes unendlich gross. Bei elastischen Körpern sind sie eng verknüpft mit der *Wellenausbreitung*.



Falls wir aber als System die beiden Körper zusammen betrachten, so sind die Stosskräfte innere Kräfte und fallen aus der Rechnung. Deshalb bleibt der Impuls des Gesamtsystems während des Stosses erhalten. Daraus ergibt sich eine Gleichung für die Geschwindigkeiten der beiden Körper nach dem Stoss, die *Impulserhaltung für das Gesamtsystem*:

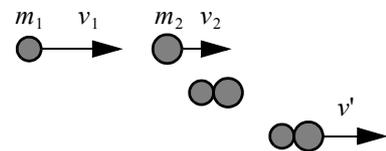


$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \tag{3.33}$$

Um eine zweite Gleichung zu erhalten, brauchen wir Annahmen über den Stoss. Ein Extremfall ist der **vollkommen inelastische Stoss**. Dabei nehmen wir an, dass die beiden Körper nach dem Stoss dieselbe Geschwindigkeitskomponente v' in Stossrichtung haben, also aneinander kleben bleiben.:

$$v'_1 = v'_2 = v'$$

So bleibt nur noch die eine Unbekannte v' . Für das Gesamtsystem muss also der Impuls vor dem Stoss gleich dem Impuls nach dem Stoss sein, d.h.:



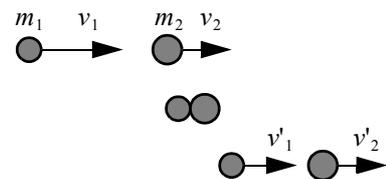
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'$$

also

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{(m_1 + m_2)}$$

Wir betrachten z.B. den Fall eines vollkommen inelastischen Stosses zwischen einem Körper mit grosser Masse m_1 und einem Körper mit viel kleinerer Masse m_2 ($m_1 \gg m_2$), setzen also $m_2 \approx 0$. Dann wird $v' = v_1$. Das wiederum bedeutet z.B., dass nach einem inelastischen Stoss zwischen einem Auto und einem Fussgänger das Auto immer noch gleich schnell fährt, der Fussgänger aber auf die Schnelligkeit des Autos beschleunigt wurde. Dabei sind sowohl die Stosskräfte als auch die Beschleunigungen gefährlich. Beide sind stark von den **Stosszeit** abhängig, also der *Zeit*, während welcher die Geschwindigkeitsänderung stattfindet. Je grösser die Stosszeit, desto kleiner die Beschleunigung und desto kleiner die maximalen Kräfte.

Die zweite extreme Annahme ist diejenige des **elastischen Stosses**. Hier nimmt man an, dass während des Stosses die *kinetische Energie erhalten* ist. Auch das liefert uns eine zweite Gleichung für die unbekanntes Geschwindigkeiten v'_1 und v'_2 nach dem Stoss:



$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v'^2_1 + m_2 v'^2_2$$

Zusammen mit der Impulserhaltung (3.33) ergibt sich nun

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 = 2 \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{(m_1 + m_2)} - v_1,$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_2 = 2 \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{(m_1 + m_2)} - v_2.$$

Die Relativgeschwindigkeit wechselt beim Stoss ihr Vorzeichen:

$$v'_2 - v'_1 = v_1 - v_2$$

Bei einem elastischen Stoss eines sehr schweren Körpers mit einem sehr leichten ($m_1 \gg m_2$) setzen wir $m_2 \approx 0$. Es ergibt sich $v'_1 = v_1$ und $v'_2 = 2v_1 - v_2$. Der schwere Körper spürt wieder nichts vom Stoss, während der

leichte an ihm reflektiert wird. Beim elastischen Stoss eines stehenden Fussgängers mit einem Auto wäre die Sache also noch dramatischer als beim inelastischen: Der Fussgänger wird auf die doppelte Schnelligkeit des Autos beschleunigt!

Interessant ist auch der Fall $m_1 = m_2$: Hier sind die Geschwindigkeiten nach einem elastischen Stoss vertauscht. Das entspricht z.B. einem zentralen Stoss beim Curling.

Reale Stößen liegen zwischen diesen beiden Extremfällen. Sie können mit einer **Stosszahl** charakterisiert werden, welche zwischen 0 (vollkommen inelastisch) und 1 (elastisch) liegt.

Nun gehen wir zurück zum PdvL und wählen als virtuellen Bewegungszustand eine *starre Rotation* um O mit der virtuellen Rotationsgeschwindigkeit $\tilde{\omega}$. Damit ergibt sich

$$\tilde{\mathcal{P}}^{(a)} = \mathbf{M}_O \cdot \tilde{\omega},$$

$$\tilde{\mathcal{P}}^{(i)} = 0,$$

$$\tilde{\mathcal{P}}^{(i)} = -\iiint_B (\mathbf{a} \cdot (\tilde{\omega} \times \mathbf{r})) dm = -\left(\iiint_B \mathbf{r} \times \mathbf{a} dm \right) \cdot \tilde{\omega}.$$

Hier ist $\tilde{\omega}$ beliebig, und somit erhalten wir

$$\mathbf{M}_O = \iiint_B \mathbf{r} \times \mathbf{a} dm. \quad (3.34)$$

Die rechte Seite der Gleichung (3.34) können wir noch weiter bearbeiten, wenn wir die folgende Identität beachten:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = \mathbf{r} \times \mathbf{a}. \quad (3.35)$$

Dadurch drängt sich die Definition des **Dralls** L_O *bezüglich* O auf:

$$\mathbf{L}_O = \iiint_B \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm. \quad (3.36)$$

Aus (3.34) erhalten wir den **Drallsatz bezüglich des inertialen Punktes** O

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{M}_O}. \quad (3.37)$$

Bemerkung

Die Bezeichnung *inertialer Punkt* meint einen Punkt, der in einem Inertialsystem ruht. Der Bezugspunkt O in (3.37) darf also nicht beschleunigt sein.

Beispiel: Physikalisches Pendel

Wir betrachten einen homogenen Balken (Masse m , Länge l), der an einem Ende gelenkig aufgehängt ist. Die Bewegung finde in einer Vertikalebene statt und sei reibungsfrei.

Gesucht ist die Bewegungsgleichung.

Die Lösungsschritte gemäss den Punkten auf Seite 89 könnten so aussehen:

1. Wir modellieren den Balken als starren Körper und betrachten ihn als System.
2. Es liegt nur ein starrer Körper vor, also muss nicht weiter freigeschnitten werden.
3. Wir führen am Balken gemäss der Skizze in allgemeiner Lage die Kräfte ein.
4. Der Freiheitsgrad ist eins. Als Lagekoordinate wählen wir den Winkel φ .
5. Kinematische Relationen braucht es hier keine.
6. Der Massenmittelpunkt C beschreibt eine Kreisbewegung. Deshalb liefert der Massenmittelpunktsatz (3.32) in tangentialer φ -Richtung

$$m \frac{l}{2} \ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi + F_\varphi$$

und in radialer Richtung, nach innen positiv gerechnet,

$$m \frac{l}{2} \dot{\varphi}^2 = -mg \cos \varphi + F_r.$$

Zusammen mit (3.36) sagt der Drallsatz (3.37) in z -Richtung

$$\dot{L}_{Oz} = \frac{d}{dt} \left(\int_0^l x(x\dot{\varphi}) \frac{m}{l} dx \right) = m \frac{l^2}{3} \ddot{\varphi} = M_{Oz} = -mg \frac{l}{2} \sin \varphi,$$

also

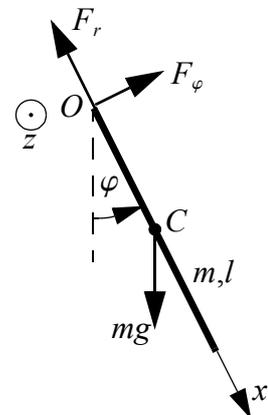
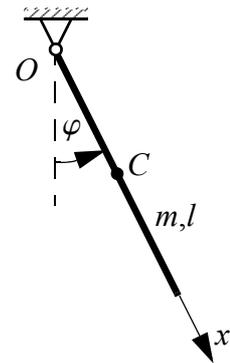
$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{3g}{2l} \right) \sin \varphi = 0.$$

7. Der Impulssatz liefert hier also «nur» Gleichungen für die unbekanntenen Komponenten der Lagerkraft (die gar nicht gesucht sind). Erst der Drallsatz bestimmt die Bewegung $\varphi(t)$. Mit einem bekanntem $\varphi(t)$ können die Lagerkraftkomponenten F_φ und F_r berechnet werden.
8. Nur die Ruhelagen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ lassen sich aus $\dot{\varphi} = 0$ sofort ermitteln. Andere Lösungen der nichtlinearen Bewegungsgleichung lassen sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken. Die Linearisierung für kleine Auslenkungen und deren Lösung ist analog zum *Beispiel: Mathematisches Pendel* auf Seite 83.
9. Die Bewegungsgleichung entspricht derjenigen des mathematischen Pendels, siehe (3.20). Man könnte versucht sein, den Balken durch eine in seinem Massenmittelpunkt konzentrierte Masse zu ersetzen, also ein mathematisches Pendel der Länge $l/2$ zu betrachten (vgl. Seite 83). Nach der Linearisierung haben wir dort eine Schwingung mit Kreisfrequenz

$$\omega_m = \sqrt{\frac{2g}{l}}$$

erhalten. Wir sehen, dass für den Balken die Kreisfrequenz deutlich kleiner wird, nämlich

$$\omega_p = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$$



Oft möchte man den Drallsatz nicht nur bezüglich eines inertialen Punktes O , sondern auch bezüglich eines *körperfesten Bezugspunktes* formulieren. Das ist nützlich, wenn keine Kreiselung vorliegt (z.B. wenn sich der Körper ungebunden bewegt). Für den Massenmittelpunkt C (aber nur für ihn!) gelingt die Umrechnung in einfacher Weise: Wir schreiben

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_C + \mathbf{r}'.$$

Durch Ableiten erhalten wir daraus

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}'.$$

Für den Drall (3.36) brauchen wir das Kreuzprodukt dieser Vektoren:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r}_C \times \mathbf{v}_C + \mathbf{r}_C \times \mathbf{v}' + \mathbf{r}' \times \mathbf{v}_C + \mathbf{r}' \times \mathbf{v}'.$$

Gemäss (3.29) und (3.36) berechnet sich der Drall bezüglich O also zu

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r}_C \times \mathbf{p} + \mathbf{r}_C \times \left(\iiint_B \mathbf{v}' dm \right) + \left(\iiint_B \mathbf{r}' dm \right) \times \mathbf{v}_C + \iiint_B \mathbf{r}' \times \mathbf{v}' dm. \quad (3.38)$$

Aus der Definition des Massenmittelpunktes (2.9) und ihrer Ableitung erhalten wir

$$\iiint_B \mathbf{r}' dm = \mathbf{0}, \quad \iiint_B \mathbf{v}' dm = \mathbf{0}. \quad (3.39)$$

Nun drängt sich auch noch die Definition des *relativen Dralls* \mathbf{L}_C (bezüglich des Massenmittelpunktes) auf:

$$\mathbf{L}_C = \iiint_B \mathbf{r}' \times \mathbf{v}' dm. \quad (3.40)$$

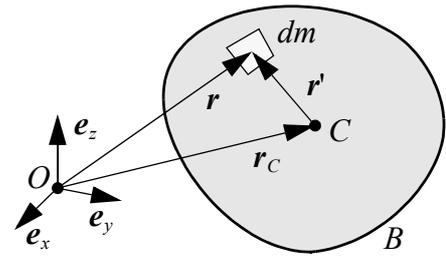
Bemerkung

Es macht nur Sinn, den Massenmittelpunkt als nichtinertialen Bezugspunkt für die Drallberechnung zu verwenden, weil sich nur dann die Rechnungen dank (3.39) vereinfachen. Deshalb ist beim Begriff *relativer Drall* automatisch der Massenmittelpunkt als Bezugspunkt gemeint.

Aus (3.38) ergibt sich die Umrechnungsformel zwischen dem Drall bezüglich eines ortsfesten Punktes und dem relativen Drall:

$$\boxed{\mathbf{L}_O = \mathbf{r}_C \times \mathbf{p} + \mathbf{L}_C}. \quad (3.41)$$

Wir setzen (3.41) in den Drallsatz (3.37) ein und versuchen, eine Gleichung zwischen \mathbf{L}_C und \mathbf{M}_C abzuleiten.

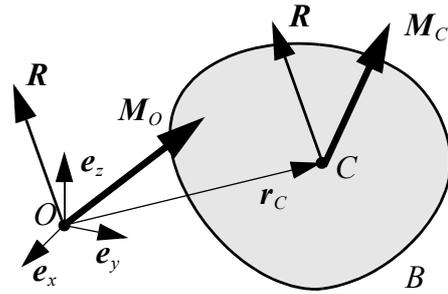


Einerseits gilt ja für die Umrechnung des Momentes die Formel (2.6):

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_C + \mathbf{r}_C \times \mathbf{R}.$$

Andererseits ist gemäss (3.31) $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C$, und wir haben, analog zu (3.35), auch die Gleichung

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_C \times \mathbf{p}) = \mathbf{v}_C \times \mathbf{p} + \mathbf{r}_C \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r}_C \times \dot{\mathbf{p}}.$$



So ergibt sich

$$\dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{r}_C \times \dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{L}}_C = \mathbf{M}_O = \mathbf{M}_C + \mathbf{r}_C \times \mathbf{R}.$$

Zusammen mit dem Impulssatz (3.30) erhalten wir also den **Drallsatz bezüglich des Massenmittelpunktes** (auch: *relativer Drallsatz*)

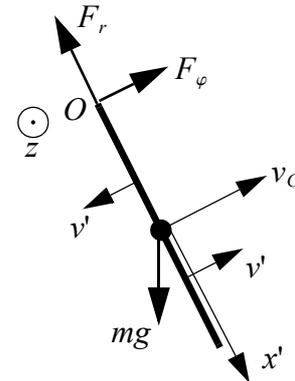
$$\boxed{\dot{\mathbf{L}}_C = \mathbf{M}_C}. \tag{3.42}$$

☞ *Wichtig:* Der Drallsatz gilt nur bezüglich eines inertialen Punktes (z.B. O) in der Form (3.37) oder für den relativen Drall (bezüglich des Massenmittelpunktes C) in der Form (3.42). Er gilt im Allgemeinen nicht bezüglich beschleunigt bewegter Punkte!

Beispiel: Physikalisches Pendel

Wir wollen übungshalber den Drallsatz für das physikalische Pendel (siehe Seite 94) auch in der Form (3.42) formulieren. Dazu beachten wir, dass alle Anteile des relativen Dralls im Integral (3.40) einen positiven Beitrag in der z -Richtung (senkrecht zur Ebene, nach vorn) liefern (siehe Skizze). Es ergibt sich also:

$$\dot{L}_{Cz} = \frac{d}{dt} \left(\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x'(x'\dot{\varphi}) \frac{m}{l} dx' \right) = m \frac{l^2}{12} \ddot{\varphi} = M_{Cz} = -\frac{l}{2} F_\varphi.$$



Zusammen mit dem Impulssatz in φ -Richtung erhält man daraus wieder den Drallsatz bezüglich des Aufhängepunktes.

Diese Lösung führt weniger direkt zum Ziel, weil die Lagerkraft F_φ in der Gleichung erscheint.

Wir haben zwar als virtuellen Bewegungszustand Starrkörperbewegungen gewählt. Diese sind aber auch für *beliebige Körper* und für *Systeme* von Körpern mögliche virtuelle Bewegungszustände. Deshalb gelten die Drallsätze (3.37), (3.42) und der Impulssatz (3.30) oder der Massenmittelpunktsatz (3.32) ganz allgemein. Im Fall von Systemen aus starren Körpern erhalten wir aber, analog zur Statik, erst nach dem *Auftrennen* genügend Gleichungen, um die Bewegung vollständig zu bestimmen. Wichtig ist auch zu beachten, dass sich der Gesamtschwerpunkt von Systemen im Allgemeinen während der Bewegung bezüglich der einzelnen starren Körper bewegt.

Beispiel: Kräftefreie Bewegung

Wir betrachten einen Körper, der sich kräftefrei bewegt, d.h.

$$\mathbf{R} = \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{M}_C = \mathbf{0}.$$

Aus dem Massenmittelpunktsatz (3.32) erhalten wir

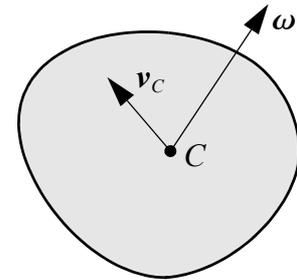
$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_C) = \mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{v}_C = \text{konst.}$$

Der Massenmittelpunkt bewegt sich also geradlinig gleichförmig.

Der Drallsatz (3.42) liefert andererseits

$$\dot{L}_C = \mathbf{0} \leftrightarrow L_C = \text{konst.}$$

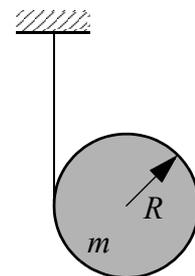
Der relative Drall bezüglich des Massenmittelpunktes ist ein konstanter Vektor. Daraus kann aber keinesfalls geschlossen werden, dass auch die Rotationsgeschwindigkeit ω konstant sei. Die Rotationen eines aufgeworfenen Quaders zeigen das Gegenteil. Interessierte Leserinnen und Leser finden die Stabilitätsdiskussionen in Abschnitt C.3 auf Seite 136.

**Kontrollfragen**

1. Wie ist der Impuls eines Systems definiert?
2. Wie lautet der Impulssatz?
3. Was ist der Zusammenhang zwischen dem Newtonschen Gesetz und dem Impulssatz?
4. Wie lautet der Massenmittelpunktsatz?
5. Gilt der Massenmittelpunktsatz auch für andere Punkte als den Massenmittelpunkt?
6. Was ist der Drall bezüglich eines festen Punktes?
7. Wie lautet der Drallsatz?
8. Wie ist der relative Drall definiert?
9. Wie berechnet sich der Drall bezüglich eines festen Punktes aus dem relativen Drall?
10. Wie lautet der Drallsatz für den Massenmittelpunkt?
11. Bezüglich welcher Punkte P kann der Drallsatz in der Form $\dot{L}_P = \mathbf{M}_P$ formuliert werden?

Übung

1. Eine homogene Scheibe (Masse m , Radius R) rolle von einem Faden ab (Jo-Jo). Der Faden ist masselos und undehnbar, alle Reibungen vernachlässigbar. Die Bewegung des Massenmittelpunktes sei vertikal. Wählen Sie den Abrollwinkel und die vertikale Verschiebung des Massenmittelpunktes als Lagekoordinaten. Wie gross ist der Freiheitsgrad des ebenen Systems? Welche kinematische Relation besteht zwischen den Koordinaten? Zeichnen Sie alle an der Scheibe angreifenden Kräfte ein! Stellen Sie den Massenmittelpunktsatz und den Drallsatz bez. des Massenmittelpunktes der Scheibe auf! Wieso reicht der Massenmittelpunktsatz nicht aus, um die Bewegung zu bestimmen?



3.5 Kinetik ebener Bewegungen

Lernziele

- Sie können bei ebenen Bewegungen den Drall aus der Rotationsgeschwindigkeit berechnen.
- Im Fall ebener Bewegungen können Sie Bewegungsdifferentialgleichungen und Bindungskräfte von aus starr modellierten Körpern, Seilen, Federn etc. zusammengesetzten Systemen herleiten. Dabei verwenden Sie zielführende Lösungsschritte (von der Modellbildung über das Freischneiden, das Aufstellen von kinematischen Relationen, den Massenmittelpunktsatz, die Drallsätze bis zur Diskussion der Resultate).
- Sie können qualitativ grosse und kleine Massenträgheitsmomente unterscheiden.
- Sie wissen, wie man Massenträgheitsmomente berechnet.

Die Berechnung des Dralls mit Hilfe der Integrale (3.36) und (3.40) ist umständlich, das haben wir beim physikalischen Pendel gesehen. Leider würde es den Rahmen dieser Vorlesung sprengen, wenn wir die allgemeine Methode zur räumlichen Berechnung des Dralls aus der Massenverteilung eines Körpers (*Trägheitstensor*) und seiner Rotationsgeschwindigkeit herleiten und den Drallsatz in einem mitrotierenden Bezugssystem verstehen wollten. Einen Einstieg dazu finden Sie im «Appendix C: Zum Drallsatz».

Hier beschränken wir uns auf *ebene Starrkörperbewegungen*, wo die Rechnungen wesentlich einfacher werden, und verzichten damit auf die faszinierende Diskussion von Kreiselphänomenen wie stehende Spielzeugkreisel, Kreiselkompass oder die dynamische Stabilisierung beim Radfahren.

Wir betrachten vorerst den Fall einer *ebenen Rotation* eines starren Körpers um einen festen Punkt O . Die Rotationsschnelligkeit sei ω . Der Drall bezüglich O ist gemäss (3.36):

$$\mathbf{L}_O = \iiint_B \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm.$$

Bei unserer ebenen Bewegung liegen aber sowohl \mathbf{r} als auch \mathbf{v} in der Bewegungsebene. Damit stehen $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ und der Drall \mathbf{L}_O senkrecht zur Ebene. Deshalb betrachten wir nur die Komponente des Dralls senkrecht zur Ebene, welche wir mit L_O bezeichnen und im Gegenuhrzeigersinn (bzw. nach vorn) positiv rechnen. Zudem ist bei der Rotation um O auch \mathbf{v} senkrecht auf \mathbf{r} , und die Schnelligkeit v berechnet sich gemäss dem Satz vom Momentanzentrum (1.11) zu

$$v = \omega r.$$

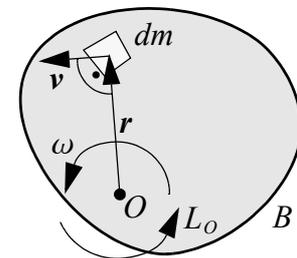
Damit reduziert sich die Drallberechnung auf

$$\boxed{L_O = I_O \omega}, \quad (3.43)$$

mit dem **Massenträgheitsmoment** I_O des Körpers bezüglich O gemäss

$$I_O = \iint_B r^2 dm. \quad (3.44)$$

Der grosse Gewinn dieser Rechnung liegt darin, dass wir den Drall nun allein mit Hilfe der Rotationsschnelligkeit und des Massenträgheitsmoments berechnen können. Letztes ist nur von der *Massenbelegung* des Körpers abhängig. Für *homogene Körper* kann die Ermittlung des



Massenträgheitsmoments noch weiter auf eine geometrische Rechnung reduziert werden, ähnlich wie beim Schwerpunkt. Die Resultate finden sich in Formelsammlungen.

Wegen der Additivität der Integration ergibt sich das Massenträgheitsmoment eines aus homogenen Teilen zusammengesetzten Körpers (bezüglich eines gegebenen Punktes) aus der Addition der einzelnen Massenträgheitsmomente.

Weil das Massenträgheitsmoment (3.44) bei der ebenen Starrkörperbewegung konstant ist, können wir den **Drallsatz für ebene Rotationen** bezüglich O auf die skalare Form

$$\boxed{\dot{L}_O = I_O \dot{\omega} = M_O} \quad (3.45)$$

vereinfachen. Damit ist der Zusammenhang zwischen der Änderung der Rotationsschnelligkeit und dem resultierenden Moment hergestellt.

☞ *Drall (d.h. Drehrichtung) und Moment müssen in dieselbe Richtung positiv gerechnet werden!*

Beispiel: Massenträgheitsmoment eines Massenpunktes

Das Massenträgheitsmoment eines Massenpunktes mit Masse m bez. eines Punktes O im Abstand r ist sehr einfach:



$$I_O = mr^2. \quad (3.46)$$

Beispiel: Massenträgheitsmoment eines homogenen Balkens

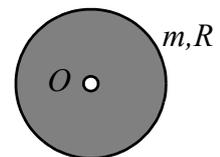
Das Massenträgheitsmoment eines homogenen Balkens (Masse m , Länge L) bezüglich eines Endpunktes ist



$$I_O = \int_0^L x^2 \left(\frac{m}{L} dx \right) = \frac{mL^2}{3}. \quad (3.47)$$

Beispiel: Massenträgheitsmoment einer homogenen Kreisscheibe

Das Massenträgheitsmoment einer homogenen Kreisscheibe bezüglich ihres Mittelpunktes ergibt sich aus einer Integration in Polarkoordinaten. Wir haben die Dichte (hier: Masse pro Flächeneinheit) $m/(R^2\pi)$ und das Flächenelement $rdrd\varphi$. Dies liefert uns das Trägheitsmoment



$$I_O = \int_0^{R^2\pi} \int_0^R r^2 \left(\frac{m}{R^2\pi} \right) r dr d\varphi = \frac{mR^2}{2}. \quad (3.48)$$

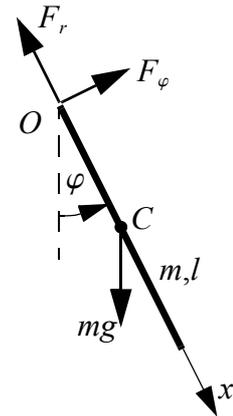
Beispiel: Physikalisches Pendel

Der Drallsatz bez. O für das physikalische Pendel (siehe *Beispiel: Physikalisches Pendel* auf Seite 95) kann jetzt mit (3.45) und (3.47) sehr rasch aufgestellt werden. Mit den Bezeichnungen beim Pendel ist

$$I_O = \frac{ml^2}{3}$$

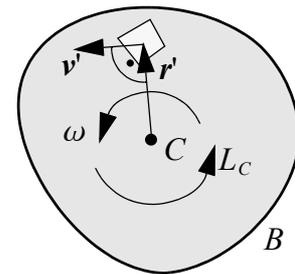
und damit wird

$$\dot{L}_O = I_O \ddot{\varphi} = m \frac{l^2}{3} \ddot{\varphi} = M_{Oz} = -mg \frac{l}{2} \sin \varphi.$$



Die Berechnung des *relativen Dralls* bez. des Massenmittelpunktes C führt bei einer ebenen Bewegung auf eine analoge Rechnung wie oben. Die relativen Vektoren r' machen nämlich eine Kreiselung um C , siehe (1.16). Damit ist wieder v' senkrecht auf r' . Der relative Drall hat also nur eine Komponente L_C senkrecht zur Bewegungsebene. Bei gegebener Rotationsschnelligkeit ω haben ist

$$v' = \omega r',$$



und wir erhalten

$$\boxed{L_C = I_C \omega} \tag{3.49}$$

mit dem **Massenträgheitsmoment** I_C des Körpers bezüglich C gemäss

$$I_C = \iint_B r'^2 dm. \tag{3.50}$$

Der *Drallsatz bezüglich des Massenmittelpunktes für ebene Bewegungen* nimmt nun eine einfache Form an:

$$\boxed{\dot{L}_C = I_C \dot{\omega} = M_C}. \tag{3.51}$$

Beispiel: Massenträgheitsmoment eines homogenen Balkens

Das Massenträgheitsmoment eines homogenen Balkens (Masse m , Länge L) bezüglich seines Mittelpunktes ist



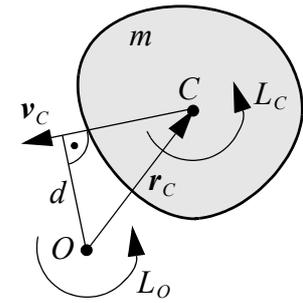
$$I_C = \int_{-L/2}^{L/2} x'^2 \left(\frac{m}{L} dx' \right) = \frac{mL^2}{12}. \tag{3.52}$$

Das hätte unsere Rechnung im *Beispiel: Physikalisches Pendel* auf Seite 97 vereinfacht.

Wenn bei einer ebenen Bewegung keine Rotation um einen ortsfesten Punkt vorliegt und man den Drall trotzdem bezüglich eines solchen Punktes berechnen möchte, so liefert die Formel (3.41)

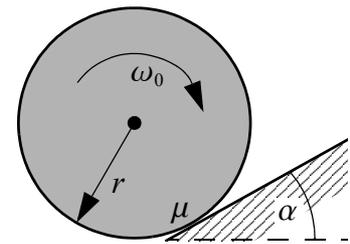
$$L_O = \pm m d v_C + L_C.$$

(Das Vorzeichen ergibt sich aus dem Drehsinn der Geschwindigkeit.) Dieses Resultat kann nützlich sein, wenn z.B. die Richtung des Impulses – und damit der Abstand d des Massenmittelpunktes vom Bezugspunkt O – konstant ist. Ansonsten wird man wohl eher den relativen Drall bez. des Massenmittelpunktes betrachten.



Beispiel: Rad auf schiefer Ebene

Ein Rad (Masse m , Radius r) rotiert vorerst ohne Berührung mit der in der Skizze eingezeichneten Rotationsgeschwindigkeit vom Betrag ω_0 . Nun wird es auf eine raue schiefe Ebene (Neigungswinkel α , Reibungskoeffizienten $\mu_0 = \mu_1 = \mu$, $\mu_2 = 0$) aufgesetzt. Durch die Reibung wird es sich ev. aufwärts in Bewegung setzen.



Gesucht ist diese Bewegung.

1. Als System betrachten wir das Rad.
2. Teile davon müssen nicht freigeschnitten werden.
3. An ihm führen wir die Kräfte gemäss Skizze in allgemeiner Lage ein.
4. In der Gleitphase ist der Freiheitsgrad 2: Wir brauchen die Lage des Massenmittelpunktes x_C und den Winkel φ zur Beschreibung der Lage.
5. In der Gleitphase gibt es keine kinematischen Relationen zwischen φ und x_C .
6. Der *Impulssatz* (3.30) ergibt in der x -Richtung

$$m \ddot{x}_C = F - mg \sin \alpha,$$

und in der y -Richtung

$$0 = N - mg \cos \alpha.$$

Wir können den *Drallsatz bez. des Massenmittelpunktes* (3.51) betrachten:

$$\dot{L}_{Cz} = -I_{Cz} \ddot{\varphi} = -\frac{mr^2}{2} \ddot{\varphi} = rF.$$

Nun brauchen wir noch eine vierte Gleichung, um die vier Unbekannten ($x_C(t)$, $\varphi(t)$, F , N) zu ermitteln, nämlich das *Gleitreibungsgesetz* (2.18). Hier ist die x -Komponente v_{Bx} des materiellen Berührungspunktes B des Rads mit der Unterlage relevant.

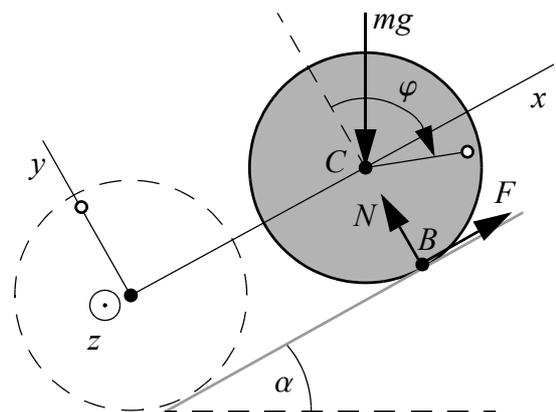
$$F = \mu N, \text{ für } v_{Bx} = (\dot{x}_C - r\dot{\varphi}) < 0.$$

7. Es ergibt sich

$$N = mg \cos \alpha, F = \mu mg \cos \alpha$$

und damit

$$\ddot{x}_C = g(\mu \cos \alpha - \sin \alpha),$$



$$\ddot{\varphi} = -\frac{2g}{r}\mu \cos \alpha.$$

8. Das sind die Anfangsbedingungen:

$$x_C(0) = 0, \dot{x}_C(0) = 0,$$

$$\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = \omega_0.$$

Damit erhalten wir

$$x_C(t) = (\mu \cos \alpha - \sin \alpha) \frac{g}{2} t^2, \quad (3.53)$$

$$\varphi(t) = \omega_0 t - \left(\frac{g}{r} \mu \cos \alpha \right) t^2. \quad (3.54)$$

Das Rad wird sich gemäss (3.53) zuerst nach oben bewegen, falls $(\mu \cos \alpha - \sin \alpha) > 0$ ist, d.h.: $\tan \alpha < \mu$. Verglichen mit der Neigung der Ebene braucht es also einen genügend grossen Gleitreibungskoeffizienten, um eine Bewegung nach oben zu erreichen. Ansonsten rutscht das Rad von Beginn weg rotierend hangabwärts.

9. Um zu wissen, wie lange das Rad gleitet und wie lange also unsere Gleichungen gültig sind, müssen wir die Geschwindigkeitskomponente v_{Bx} des Rad-Berührungspunktes mittels (1.16), (3.53) und (3.54) bestimmen (wir rechnen in positiver x -Richtung positiv):

$$v_{Bx} = \dot{x}_C - r\dot{\varphi} = (3\mu \cos \alpha - \sin \alpha)gt - \omega_0 r.$$

Anfangs ist die Geschwindigkeitskomponente v_{Bx} negativ.

Falls $\tan \alpha < 3\mu$ ist, so nimmt sie zu und wird null für

$$t_1 = \frac{\omega_0 r}{g(3\mu \cos \alpha - \sin \alpha)}.$$

Ab diesem Zeitpunkt ist das Gleitreibungsgesetz nicht mehr anwendbar. Dafür hat man eine *kinematische Relation* in Form der Rollbedingung $\dot{x}_C = r\dot{\varphi}$. Zusammen mit dem Drall- und Massenmittelpunktsatz können die unbekanntenen Kräfte N, F sowie die Bewegung auch hier berechnet werden. Die Lösung dieses Problems wird dem Leser / der Leserin als Übung vorgeschlagen.

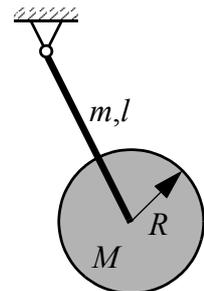
Falls aber $\tan \alpha \geq 3\mu$ gilt, die Rampe also zu steil ist, so hört das Gleiten nicht mehr auf.

Kontrollfragen

1. Wie berechnet man den Drall bei einer ebenen Rotation?
2. Wie berechnet man den relativen Drall bez. des Massenmittelpunktes bei einer ebenen Bewegung?
3. Welche Drallsätze können bei ebenen Bewegungen formuliert werden?
4. Wozu ist das Massenträgheitsmoment nützlich?

Übungen

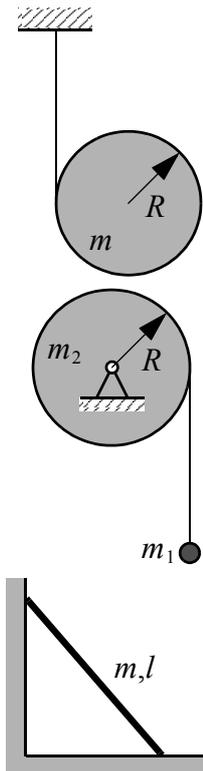
1. Eine homogene Scheibe (Masse M , Radius R) ist mit ihrem Mittelpunkt auf das Ende eines homogenen Balkens (Masse m , Länge l) geschweisst. Das andere Ende des Balkens ist gelenkig gelagert. Das System kann eben modelliert werden; alle Reibungskräfte sind vernachlässigbar. Stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichung auf! Wie nützlich ist hier der Massenmittelpunktsatz? Berechnen Sie die Bewegung für eine gegebene kleine Anfangsauslenkung! Berechnen Sie die Lagerkräfte im Gelenk während der Bewegung!



2. Wir betrachten die Jo-Jo-Aufgabe von Seite 98. Formulieren Sie den Drallsatz bezüglich des Aufhängepunktes des Fadens! Vergleichen Sie den Drallsatz bezüglich dieses Punktes mit der im letzten Abschnitt gewonnenen Form! Lösen Sie die Bewegungsgleichungen und berechnen Sie die Fadenkraft! Vergleichen Sie die Lösung mit derjenigen für die Scheibe im freien Fall!

3. Ein Körper der Masse m_1 ist an einem masselosen (undehnbaren), um eine homogene Scheibe (Masse m_2 , Radius R) gewickelten Fadens befestigt. Das Lager der Scheibe sei zuerst blockiert und werde zur Zeit $t = 0$ freigegeben. Reibungseffekte sind vernachlässigbar. Berechnen Sie die Bewegung des ebenen Systems!

4. Betrachte einen homogenen Balken (Masse m , Länge l). Ein Ende gleitet reibungsfrei auf einer horizontalen und das andere auf einer vertikalen Ebene. Die Bewegung sei in eine Vertikalebene gebunden. Stellen Sie die Gleichungen zur Bestimmung der Normalkräfte und der Bewegung auf!



3.6 Rückblick

Rückblickend können wir die Mechanik aus einem umfassenderen Blickwinkel betrachten: Die Statik ist ein Spezialfall der Bewegung, bei dem alle Geschwindigkeiten dauernd verschwinden und damit die Beschleunigungen null sind. Die Gleichungen der Statik sind also Folgerungen aus den allgemeineren Bewegungsgesetzen der Dynamik. Und die Erkenntnisse der Statik gelten nicht nur für Ruhe, sondern allgemeiner für konstante Geschwindigkeiten/Rotationsgeschwindigkeiten.

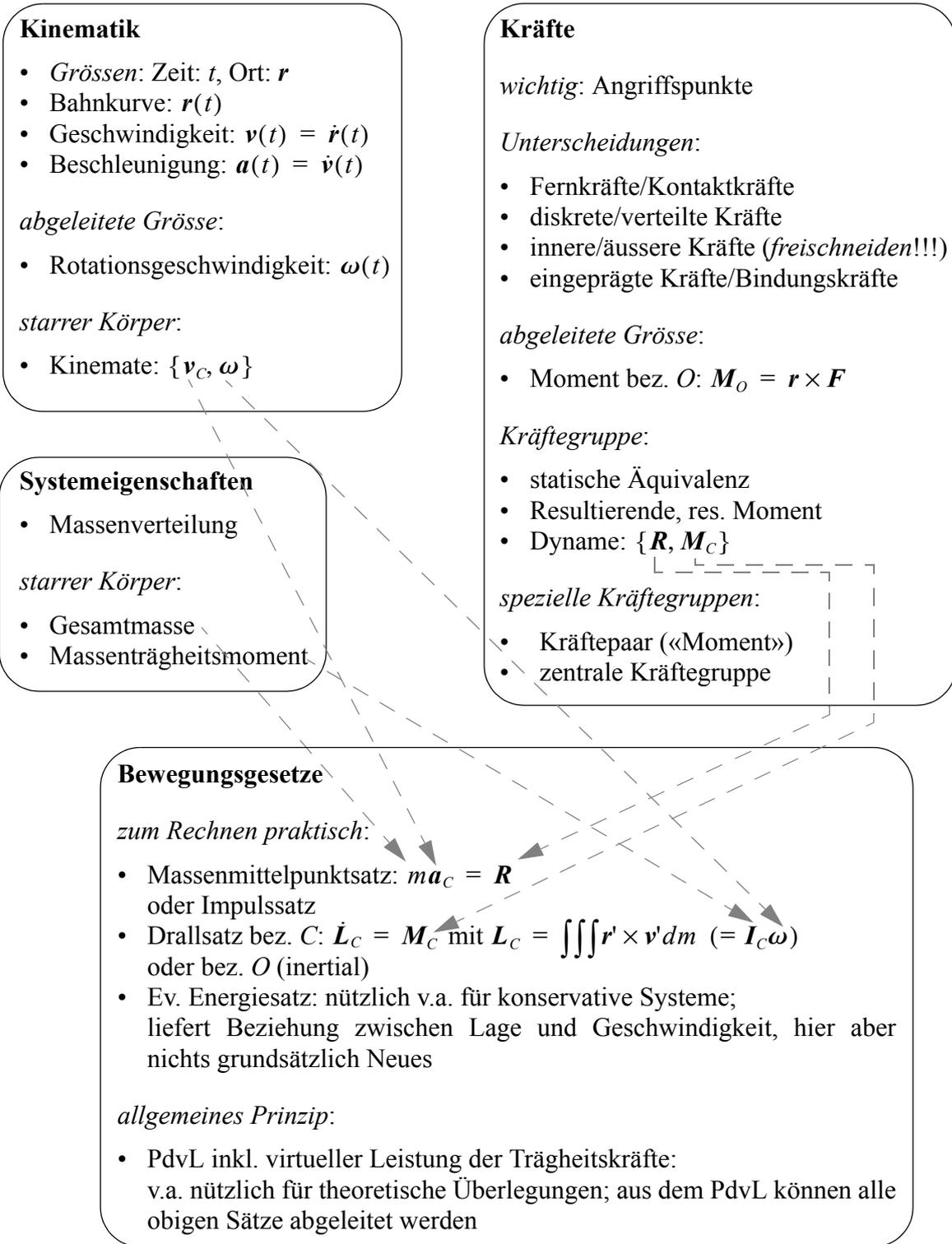
Die Bewegung des betrachteten Systems wird durch seine Kinematik beschrieben. Um den Zusammenhang der Bewegung mit den Kräften herzustellen, muss man die Massenverteilung des Systems kennen. Dann kann man die Bewegungsdifferentialgleichungen aufstellen, z.B. als Impulssatz für infinitesimale Massenelemente.

Im Fall eines *starrten Körpers* (ev. als Teil eines Systems) beschreiben wir den Bewegungszustand durch die Kinematik und die angreifenden äusseren Kräfte durch ihre Dynamik. Aus der Massenverteilung lesen wir die Masse des Körpers ab und berechnen das Massenträgheitsmoment bez. des Massenmittelpunktes. Dann liefern der Massenmittelpunktsatz und der Drallsatz bez. des Massenmittelpunktes die nötigen Informationen, um die zeitliche Änderung der Kinematik zu ermitteln. Im Raum haben wir, dem Freiheitsgrad eines starren Körpers entsprechend, sechs Gleichungen für sechs unbekannte Funktionen. In der Ebene sind es drei Gleichungen für drei unbekannte Funktionen. Bei bekannten Anfangsbedingungen ist die Bewegung eindeutig.

Massenpunkte müssen wir überhaupt nicht mehr separat diskutieren. Sie können als Spezialfall von starren Körpern betrachtet werden, ihre Bewegung wird durch den Massenmittelpunkt beschrieben.

Wir haben in der Statik trotzdem viel Wesentliches gelernt, das in der Dynamik oft verschüttet wird: z.B. das konsequente Freischneiden des Systems, die Unterscheidung zwischen inneren und äusseren Kräften, das Wesen der Bindungskräfte und ihre Berechnung.

Unser Ziel (siehe «Ausblick» auf Seite 4) haben wir für Systeme aus starren Körpern damit weitgehend erreicht, auch wenn der Drallsatz bei räumlichen Bewegungen und der Energiesatz noch Stoff für ein weiteres Semester liefern könnten. Die wesentlichen Erkenntnisse und Zusammenhänge dieses Semesters fassen wir wie folgt zusammen:



Appendix A: Zur Vektorrechnung

In der Mechanik braucht man Vektoren z.B. zur Beschreibung von Lagen, Bewegungen oder Kräften. Deshalb ist die Vektorrechnung ein grundlegendes mathematisches Werkzeug.

Diese Zusammenstellung repetiert die wichtigsten Definitionen und Resultate und erläutert sie mit Beispielen aus dem Mechanik-Skript. In der Vorlesung und in den Übungen werden die hier besprochenen Kenntnisse als bekannt vorausgesetzt. Insbesondere müssen Sie Skalar- und Kreuzprodukte von Hand ausrechnen können.

☞ *Überspringen Sie bei einer ersten Lektüre die mit einem Stern (*) bezeichneten Bemerkungen und Aufgaben. Diese sind für das zweite Durcharbeiten oder für Fortgeschrittene gedacht.*

A.1 Vektoren in der Physik

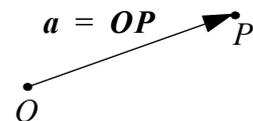
Skalare physikalische Grössen (Temperatur, Druck, Ladung etc.) lassen sich durch reelle Zahlen beschreiben. Es gibt aber auch Grössen, die durch *Betrag und Richtung* charakterisiert werden müssen. Dazu gehören u.a. Geschwindigkeiten, Kräfte und elektromagnetische Felder. Sie alle werden mathematisch durch *Vektoren* dargestellt.

Wir schreiben Vektoren im Drucksatz fett (z.B.: \mathbf{a}) und von Hand unterstrichen (z.B.: \underline{a}). Die Bezeichnung mit Pfeilen oberhalb des Buchstabens (z.B.: \vec{a}) ist auch sehr verbreitet und in Übungen/Prüfungen gleichwertig zugelassen. Wichtig ist aber die klare Unterscheidung zwischen Vektoren und Skalaren.

In Zeichnungen werden Vektoren durch Pfeile dargestellt, und Pfeile sind auch ein nützliches gedankliches Modell. Die Länge des Pfeils ist ein Mass für den *Betrag* (auch *Norm*) des Vektors. Den Betrag des Vektors \mathbf{a} bezeichnen wir mit $|\mathbf{a}|$, oft auch kurz mit a .

Beispiel: Ortsvektoren

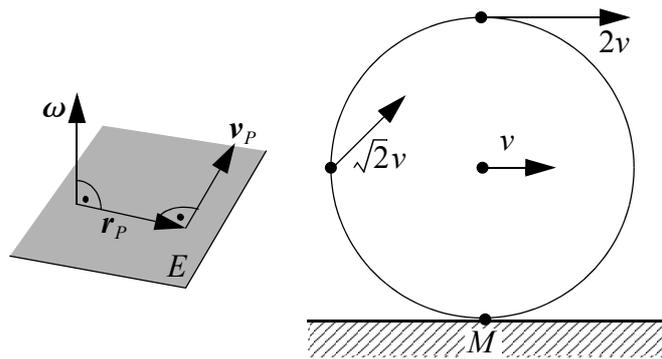
Ein weiteres wichtiges Beispiel sind die *Ortsvektoren* (auch *Radiusvektoren*). Sie zeigen von einem gegebenen Bezugspunkt (meist dem Ursprung O) zum gewünschten Punkt (hier P) und sind zur Beschreibung von materiellen oder geometrischen Punkten im Raum nützlich. Der Vektor $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP}$ ist also ein Pfeil mit Startpunkt O und Endpunkt (Spitze) P . Seine Länge entspricht dem Abstand \overline{OP} .



*** Bemerkung: Beschriftung mit Vektoren bzw. Skalaren**

Manchmal beschriften wir die Vektorpfeile mit fetten Buchstaben (r_P , v_P , ω). Dann bezeichnen wir die Vektoren mit diesen Namen.

Wenn wir Vektoren skalar beschriften (v , $\sqrt{2}v$, $2v$), so ist ihre Richtung durch den Pfeil definiert. Der Skalar bezeichnet die Komponente in der gezeichneten Richtung. Z.B. ist die Geschwindigkeit des Radmittelpunktes für $v > 0$ horizontal nach rechts und hat den Betrag v .



*** Bemerkung: Zusätzliche Eigenschaften von Vektoren**

Die im nächsten Abschnitt (** Bemerkung: Identitäten für Vektoren* auf Seite 109) zusammengestellten Relationen (A.1) bis (A.7) gelten für alle Vektoren. Je nach den physikalischen Eigenschaften der dargestellten Objekte können Vektoren aber auch noch zusätzliche Eigenschaften haben: So gibt es an einen Angriffspunkt *gebundene Vektoren* (z.B. Ortsvektoren, Kräfte), *linienflüchtige Vektoren*, die längs einer Geraden verschiebbar sind (z.B. Kräfte an einem starren Körper) und *freie Vektoren*, die frei parallel verschiebbar sind (z.B. die Rotationsgeschwindigkeit eines starren Körpers).

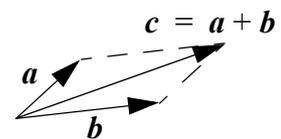
*** Bemerkung: Dimensionen**

Die physikalischen Vektoren sind dimensionsbehaftet. Z.B. werden Ortsvektoren in Metern [m], Geschwindigkeitsvektoren in Metern pro Sekunde [m/s], Rotationsgeschwindigkeiten in Bogenmass pro Sekunde [rad/s] bzw. [1/s], Kräfte in Newton [N], Momente in Newton-Meter [Nm] gemessen. In den Zeichnungen haben also z.B. die Geschwindigkeitsvektoren andere Einheiten als die Ortsvektoren der entsprechenden materiellen Punkte!

A.2 Addition von Vektoren und Multiplikation mit Skalaren

Für Vektoren ist eine *Addition* und eine *Multiplikation mit Zahlen* definiert (wir nennen die Zahlen auch *Skalare*).

Zeichnerisch, in der Darstellung durch Pfeile, erfolgt die *Addition* der Vektoren a und b zum Summenvektor $c = a + b$ gemäss der *Parallelogrammregel* (siehe Zeichnung). Der Endpunkt des Summenvektors c kann also auch konstruiert werden, indem man den Vektor b so parallel verschiebt, dass sein Anfangspunkt in den Endpunkt von a zu liegen kommt (oder umgekehrt).



Wird ein Vektor mit einem positiven Skalar *multipliziert*, so ändert sich seine Länge entsprechend; die Richtung bleibt gleich. Bei Multiplikation mit einem negativen Skalar bleibt der Vektor immer noch parallel, zeigt aber in die umgekehrte Richtung.

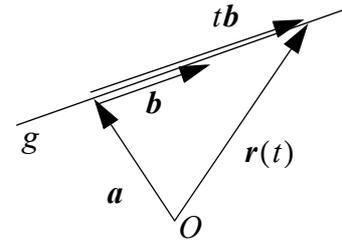
Beispiel: Einheitsvektor

Ein *Einheitsvektor* hat Länge 1. Jeder Vektor (hier a) lässt sich als Produkt eines Einheitsvektors (hier e) mit dem Betrag des Vektors (hier a) schreiben.



Beispiel: Parameterdarstellung einer Geraden

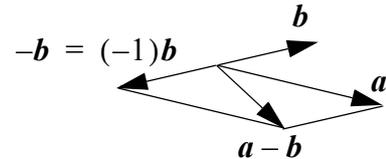
Die Ortsvektoren der Punkte einer Geraden g können wir wie folgt konstruieren: Wir wählen den Ortsvektor a eines beliebigen Punktes auf der Geraden und einen Vektor b in Richtung der Geraden. Nun multiplizieren wir b mit dem skalaren Parameter t und addieren zu a , d.h. $r(t) = a + tb$. Wenn t die reellen Zahlen durchläuft, so überstreicht der Ortsvektor $r(t)$ die Gerade. Sie ist also die Bahnkurve eines durch $r(t)$ beschriebenen Punktes.



Falls man t als Zeit interpretiert, so ist b gerade der Geschwindigkeitsvektor der Bewegung: $v(t) = \dot{r}(t) = b$.

*** Bemerkung: Subtraktion**

Die *Subtraktion* von Vektoren kann auf eine Multiplikation mit -1 und eine Summe zurückgeführt werden: $a - b = a + (-1)b$.



(Mathematisch genauer wäre: Man addiert das inverse Element der additiven Gruppe der Vektoren, siehe (A.4).)

*** Bemerkung: Identitäten für Vektoren**

Am Beispiel der Ortsvektoren kann man sich die folgenden Identitäten überlegen:

$$a + b = b + a \text{ (Kommutativität der Addition),} \tag{A.1}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ (Assoziativität der Addition),} \tag{A.2}$$

$$\text{es existiert ein Nullvektor } \mathbf{0} \text{ mit } a + \mathbf{0} = a \text{ für alle } a, \tag{A.3}$$

$$\text{zu jedem } a \text{ existiert ein inverser Vektor } (-a) \text{ mit } a + (-a) = \mathbf{0}, \tag{A.4}$$

$$s(ta) = (st)a \text{ (Assoziativität der Multiplikation mit Skalaren),} \tag{A.5}$$

$$1a = a, \tag{A.6}$$

$$(s + t)a = sa + ta, s(a + b) = sa + sb \text{ (Distributivität).} \tag{A.7}$$

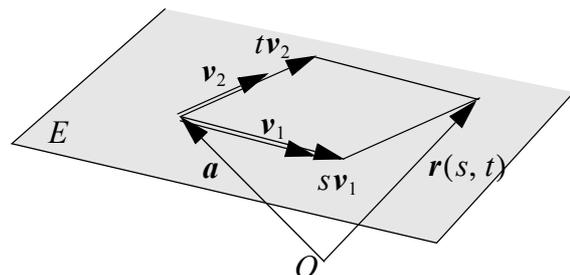
All diese Beziehungen müssen gelten, wenn man Größen durch Vektoren darstellen möchte. Bei der abstrakten Definition von Vektorräumen können diese Beziehungen als Axiome dienen.

*** Aufgabe: Beweis der Assoziativität**

Beweisen Sie die Identität (A.2) für Ortsvektoren graphisch!

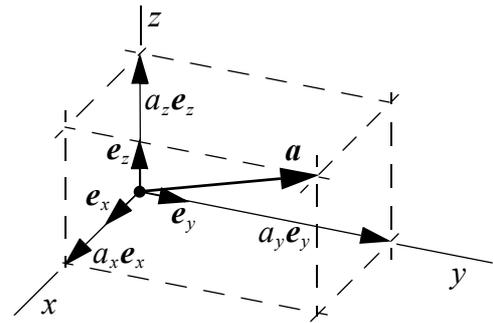
*** Beispiel: Parameterdarstellung einer Ebene**

Analog zur Geradengleichung des obigen Beispiels kann auch eine Ebene E dargestellt werden: Wir gehen aus vom Ortsvektor a eines Punktes der Ebene und zwei (nicht parallelen) Vektoren v_1 und v_2 in der Ebene. Dann kann jeder Punkt der Ebene beschrieben werden durch $r(s, t) = a + sv_1 + tv_2$ mit reellen Zahlen s und t .



A.3 Basis, Komponenten

Wir beschränken uns nun auf drei Dimensionen (und nehmen stillschweigend an, dass für unsere Vektoren auch eine Längen- und Winkelmessung definiert ist). Dann bilden drei senkrecht aufeinander stehende Einheitsvektoren $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ eine *orthonormale Basis*. Jeder Vektor \mathbf{a} kann als *Linearkombination* der drei Basisvektoren dargestellt werden:



$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z. \quad (\text{A.8})$$

Die skalaren Größen a_x etc. nennen wir *Komponenten* des Vektors. In *Komponentenschreibweise* schreiben wir den Vektor als *Kolonnenvektor*

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

In der Geometrie bezeichnet man die Größen a_x etc. meist als *Koordinaten* und verwendet den Begriff *Komponenten* für die Vektoren $a_x \mathbf{e}_x$ etc. Diese Begriffsbildung macht z.B. für Kraft- und Geschwindigkeitsvektoren weniger Sinn.

Die Addition und Multiplikation mit Skalaren erfolgt komponentenweise: Mit

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

wird also

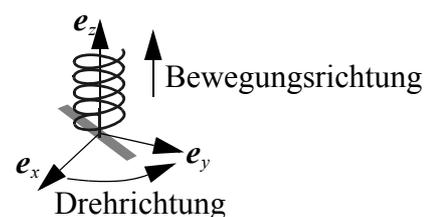
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix} \text{ und } t\mathbf{a} = \begin{pmatrix} ta_x \\ ta_y \\ ta_z \end{pmatrix}.$$

Die *Norm* des Vektors \mathbf{a} , seine Länge, ergibt sich aus den Komponenten mit Hilfe des Satzes von Pythagoras zu

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (\text{A.10})$$

Die drei Basisvektoren müssen ein *Rechtssystem* bilden.

Zur Identifikation von Rechtssystemen gibt es die *Schrauben- oder Korkenzieherregel*: Beim Drehen des Korkenziehergriffs von \mathbf{e}_x nach \mathbf{e}_y bewegt sich seine



Schraubenachse in positiver e_z -Richtung. (In der Zeichnung müsste die Flasche also auf den Kopf gestellt werden.)

Äquivalent dazu ist die *Rechte-Hand-Regel*: Wenn e_x in Richtung des Daumens und e_y in Richtung des Zeigefingers der rechten Hand zeigt, so zeigt e_z in Richtung des Mittelfingers. (Auch hier müssen Sie Ihre rechte Hand verrenken. Deshalb ist es vorteilhaft, sich die Schraube oder den Korkenzieher vorzustellen.)

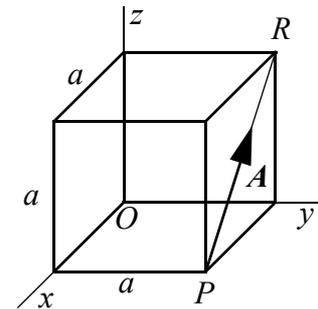
Bemerkung: Zeilenvektor

Um Platz zu sparen verwenden wir auch die Schreibweise als Zeilenvektor: $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

* (Im Kontext der Linearen Algebra wird man genauer sein müssen und zwischen Zeilen- und Spaltenvektoren unterscheiden, bzw. ein Transpositionszeichen schreiben.)

Beispiel: Kraftvektor

Der gezeichnete (Kraft-) Vektor \mathbf{A} am Würfel mit Kantenlängen a habe den Betrag A und liege in der Flächendiagonalen PR . Gesucht sind seine Komponenten.



Wir konstruieren zuerst einen Einheitsvektor \mathbf{e} in Krafrichtung. Dazu nehmen wir irgendeinen Vektor in dieser Richtung und dividieren ihn durch seine Norm: Die Punkte P und R haben die Koordinaten $P(a, a, 0)$ bzw. $R(0, a, a)$. Den Vektor von P nach R erhalten wir durch Differenzbildung

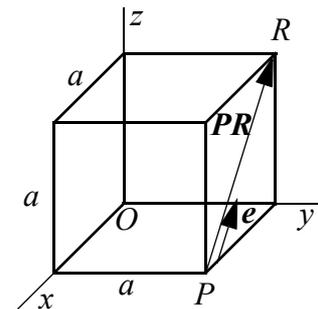
$$\mathbf{PR} = (0, a, a) - (a, a, 0) = (-a, 0, a)$$

(Aus Platzgründen verwenden wir die kompakte Notation als Zeilenvektoren, siehe *Bemerkung: Zeilenvektor* oben) Die Norm von \mathbf{PR} ist

$$|\mathbf{PR}| = |(-a, 0, a)| = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}|a| = \sqrt{2}a$$

Also können wir den Einheitsvektor folgendermassen berechnen:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{PR}}{|\mathbf{PR}|} = \frac{1}{\sqrt{2}a}(-a, 0, a) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$$



Gemäss Problemstellung soll der Vektor \mathbf{A} in diese Richtung zeigen und den Betrag A haben. Also müssen wir nur noch \mathbf{e} mit diesem Betrag multiplizieren:

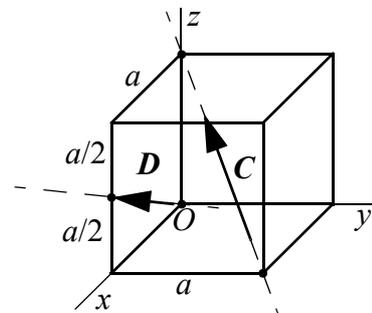
$$\mathbf{A} = A\mathbf{e} = \frac{A}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$$

(In diesem Beispiel wäre auch die Projektion des Vektors vom Betrag A auf die Koordinatenachsen einfach ablesbar: $a_x = -A \cos 45^\circ$, $a_y = 0$, $a_z = A \cos 45^\circ$.)

Aufgabe: Kraftvektoren

Die skizzierten Vektoren \mathbf{C} bzw. \mathbf{D} haben sollen die Beträge $3G$ bzw. G haben. Berechnen Sie deren Komponenten.

(Lösung: $\sqrt{3}G(-1, -1, 1)$ bzw. $(G/\sqrt{5})(2, 0, 1)$)



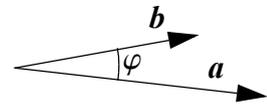
*** Bemerkung: Schreibweisen**

Die Summenschreibweise (A.8) ist oft für theoretische Überlegungen vorteilhaft, während man bei konkreten Zahlenrechnungen meist mit einzelnen Komponenten oder mit den ganzen Spalten- bzw. Zeilenvektoren rechnet.

Zur Komponentenrechnung passt in den Skizzen das Einzeichnen der Koordinatenachsen statt der Einheitsvektoren (siehe *Aufgabe: Kraftvektoren* oben).

A.4 Skalarprodukt

Wir betrachten zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} , die den Winkel φ einschließen.



Das *Skalarprodukt* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (auch *inneres Produkt*) ist definiert als die reelle Zahl

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi. \quad (\text{A.11})$$

Das Skalarprodukt (A.11) ist also positiv für $0 \leq \varphi < \pi/2$. Es verschwindet, wenn die Vektoren senkrecht aufeinander stehen: $\varphi = \pi/2$, und es ist negativ für $\pi/2 < \varphi \leq \pi$. (Annahme: $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$)

Falls die beiden Vektoren komponentenweise gegeben sind,

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z \text{ und } \mathbf{b} = b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z,$$

so gilt die *Komponentenformel*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (\text{A.12})$$

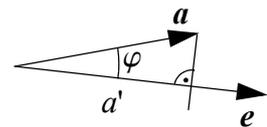
Die Formel (A.12) werden Sie unten selbst herleiten (* *Aufgabe: Beweis der Komponentenformel* auf Seite 114).

Das Skalarprodukt ist z.B. nützlich, um Projektionen oder Winkel zu berechnen, wie in den folgenden Beispielen erläutert.

Beispiel: Projektion, Komponente

Das Skalarprodukt eines Vektors \mathbf{a} mit einem Einheitsvektor \mathbf{e} (d.h. $|\mathbf{e}| = 1$) ergibt gemäss (A.11) gerade die *Komponente* a' von \mathbf{a} in Richtung von \mathbf{e} :

$$a' = |\mathbf{a}|\cos\varphi = |\mathbf{a}||\mathbf{e}|\cos\varphi = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}.$$



Die *Projektion* von \mathbf{a} in Richtung von \mathbf{e} ist also der Vektor $a'\mathbf{e} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}$.

Das Vorzeichen von a' zeigt an, ob die Projektion in Richtung von \mathbf{e} oder umgekehrt gerichtet ist.

Beispiel: Polarkoordinaten

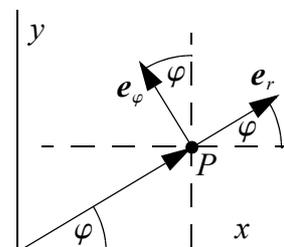
Die x - y - z -Komponenten des radialen und tangentialen Einheitsvektors der Polarkoordinaten können wir geometrisch aus der Zeichnung ablesen:

$$\mathbf{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \text{ und } \mathbf{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0),$$

$$\text{bzw. } \mathbf{e}_r = \cos\varphi \mathbf{e}_x + \sin\varphi \mathbf{e}_y \text{ und } \mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi \mathbf{e}_x + \cos\varphi \mathbf{e}_y.$$

Mit dem Skalarprodukt verifizieren wir nun, dass die abgelesenen Vektoren tatsächlich senkrecht aufeinander stehen:

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\varphi = \cos\varphi(-\sin\varphi) + \sin\varphi \cos\varphi + 0 = 0.$$



Beispiel: Winkelberechnung

Es soll der Winkel δ zwischen den beiden Vektoren \mathbf{A} (Betrag A) und \mathbf{C} (Betrag $3G$, siehe *Aufgabe: Kraftvektoren* auf Seite 111) ermittelt werden. Dazu berechnen wir zuerst gemäss (A.12) das Skalarprodukt der Vektoren

$$\mathbf{A} = \frac{A}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{C} = \sqrt{3}G \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \frac{A}{\sqrt{2}} \sqrt{3}G((-1)(-1) + (0)(-1) + (1)(1)) = 2 \frac{A}{\sqrt{2}} \sqrt{3}G = \sqrt{2} \sqrt{3}AG.$$

Nun verwenden wir (A.11), um mit Hilfe der bekannten Beträge den Kosinus des Winkels zu berechnen. Es ist

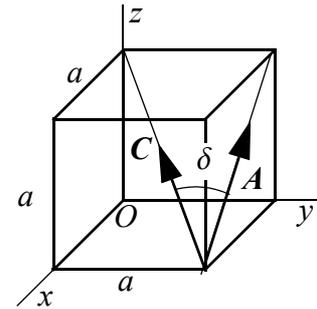
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = |\mathbf{A}||\mathbf{C}| \cos \delta = A(3G) \cos \delta,$$

also ergibt sich

$$\cos \delta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}}{3AG} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

und damit

$$\delta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right).$$

**Aufgabe: Winkelberechnung**

Offensichtlich ist die obige Winkelberechnung unabhängig von den Beträgen der Vektoren. Wir hätten also einfachere, zu \mathbf{A} bzw. \mathbf{C} parallele Vektoren verwenden können. Berechnen Sie deshalb den Winkel nochmals, indem Sie die aus dem obigen Beispiel und der Aufgabe schon bekannten Einheitsvektoren verwenden. Welcher Rechenschritt vereinfacht sich dadurch erheblich?

*** Bemerkung: Identitäten für das Skalarprodukt**

Die folgenden Identitäten ergeben sich aus der Definition:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \text{ (Kommutativität),} \quad (\text{A.13})$$

$$(s\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = s(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (s\mathbf{b}) \text{ für } s \in \mathbb{R} \text{ (Assoziativität),} \quad (\text{A.14})$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \text{ (Distributivität),} \quad (\text{A.15})$$

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|, \quad (\text{A.16})$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \text{ (insbesondere } \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = 1 \text{ etc.),} \quad (\text{A.17})$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \text{ oder } \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ oder } \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ (insbesondere gilt: } \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = 0 \text{ etc.),} \quad (\text{A.18})$$

$$a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_x \text{ etc.} \quad (\text{A.19})$$

*** Aufgabe: Beweise der Identitäten**

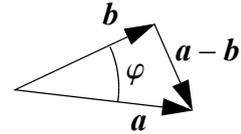
Beweisen Sie die Formeln (A.13) bis (A.19), indem Sie sie auf die Definition (A.11) zurückführen.

(Nur die Distributivität (A.15) ist nicht sofort klar. Hier hilft die Interpretation als Projektion, siehe *Beispiel: Projektion, Komponente* auf Seite 112.)

*** Aufgabe: Beweis der Komponentenformel**

Leiten Sie die Komponentenformel (A.12) aus der geometrischen Formel (A.11) her.

Tipp: Betrachten Sie z.B. zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} mit Zwischenwinkel φ sowie den Differenzvektor $\mathbf{a} - \mathbf{b}$. Nun kann $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2$ auf zwei Arten berechnet werden: Komponentenweise gemäss (A.10) und geometrisch mit dem Kosinussatz...

*** Bemerkung: Euklidischer Vektorraum**

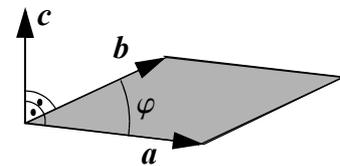
Ein Vektorraum mit einem positiv definiten Skalarprodukt heisst *Euklidischer Vektorraum*. (Positiv definit bedeutet, dass $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0$ für alle Vektoren $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.)

A.5 Kreuzprodukt

Wir betrachten wieder zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} , die den Winkel φ einschliessen ($0 \leq \varphi \leq \pi$).

Das *Kreuzprodukt* $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (auch *Vektorprodukt*, *äusseres Produkt*) ist ein Vektor mit folgenden Eigenschaften:

- der Vektor $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ steht senkrecht auf \mathbf{a} und \mathbf{b} ,
- die drei Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} bilden (in dieser Reihenfolge) ein Rechtssystem,
- der *Betrag* von \mathbf{c} ist gegeben durch



$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi. \quad (\text{A.20})$$

Falls die beiden Vektoren komponentenweise gegeben sind,

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z,$$

so gilt die *Komponentenformel*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{e}_z. \quad (\text{A.21})$$

Sie müssen sich nur die erste Komponente der Formel (A.21) merken. Die weiteren ergeben sich durch zyklische Vertauschung der Indizes x, y, z (siehe *Beispiel: Moment* auf Seite 115).

Die korrekte Herleitung von (A.21) aus der geometrischen Definition und Formel (A.20) ist nicht offensichtlich (siehe dazu ** Bemerkung: Herleitung der Komponentenformel* auf Seite 116).

Mit dem Kreuzprodukt können wir aus komponentenweise gegebenen Vektoren dazu senkrechte konstruieren, Abstände und Flächen berechnen u.a.m. Verschiedene Grössen in der Mechanik sind über Kreuzprodukte definiert oder verknüpft (Rotationsgeschwindigkeit, Moment, Drill).

Bemerkung: Parallele Vektoren

Formel (A.20) zeigt, dass das Kreuzprodukt genau dann verschwindet (d.h.: gleich dem Nullvektor ist), wenn einer der Vektoren verschwindet oder die Vektoren parallel sind.

Beispiel: Moment

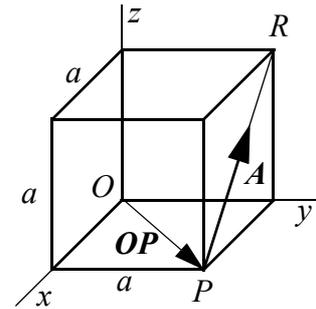
Wir berechnen das Kreuzprodukt des Vektors OP mit dem Vektor A vom Betrag A («Moment der Kraft A bez. O »).

Der Vektor OP hat die Komponenten

$$OP = (a, a, 0) = a(1, 1, 0),$$

der Vektor A

$$A = \frac{A}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1).$$



Zur einfachen Berechnung des Kreuzproduktes multiplizieren wir zuerst die Beträge (siehe Formel (A.23) unten) und schreiben Kolonnenvektoren:

$$OP \times A = \frac{aA}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Von Formel (A.21) haben Sie sich den ersten Summanden gemerkt: Die x -Komponente des Kreuzproduktes entsteht aus der y -Komponente des ersten Vektors mal die z -Komponente des zweiten Vektors (« x - y - z ») minus «das Umgekehrte» (z -Komponente des ersten mal y -Komponente des zweiten). Im Beispiel ist die x -Komponente des Resultats also $1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die weiteren Komponenten des Kreuzproduktes ergeben sich durch zyklisches Vertauschen von x, y und z . Die y -Komponente ist also $0 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -1$, die z -Komponente $1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 1$. Also gesamthaft:

$$OP \times A = \frac{aA}{\sqrt{2}}(1, -1, 1).$$

Beispiel: Abstand Punkt-Gerade

Es soll der kleinste Abstand d_A der Geraden durch P und R vom Punkt O ermittelt werden («Hebelarm»).

Der gesuchte kleinste Abstand liegt auf einer Senkrechten auf der Geraden; der entsprechende Geradenpunkt sei T . Nun betrachten wir das rechtwinklige Dreieck OPT (statt P kann auch ein beliebiger anderer Punkt auf der Geraden gewählt werden). In diesem Dreieck ist die gesuchte Strecke d_A eine Kathete. Wir müssen also nur die Länge der Hypotenuse PO mit dem Sinus des spitzen Winkels α multiplizieren:

$$d_A = |PO| \sin \alpha.$$

Wenn wir den Einheitsvektor e in Geradenrichtung betrachten, so ist aber gemäss Definition (A.20) des Kreuzproduktes

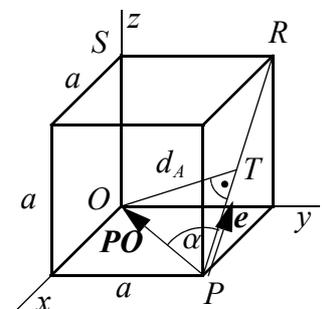
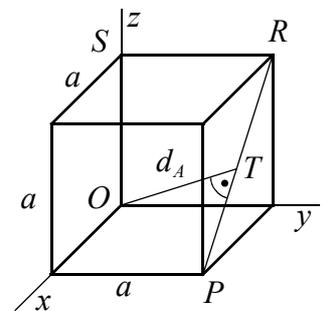
$$|PO| \sin \alpha = |PO| |e| \sin \alpha = |PO \times e|.$$

Also ist

$$d_A = |PO \times e|$$

und ausgerechnet:

$$d_A = \left| (-a, -a, 0) \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right| = \left| \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}} \right) \right| = \sqrt{3} a.$$



Aufgabe: Abstand

Berechnen Sie im obigen Beispiel den kleinsten Abstand der Raumdiagonalen durch P und S vom Punkt O . (Lösung: $\sqrt{2/3}a$)

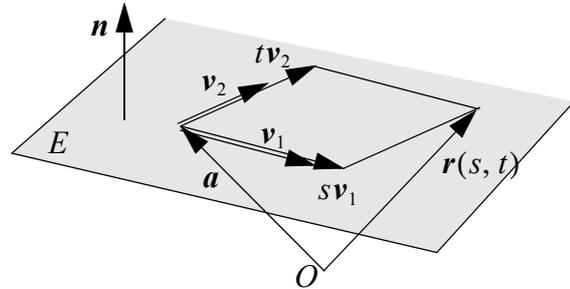
*** Beispiel: Gemischtes Produkt verschwindet**

Ein gemischtes Produkt der Form $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ verschwindet immer (siehe (A.32)). Dies wird z.B. aus folgender Überlegung sofort klar: Der Vektor $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ ist definitionsgemäss senkrecht auf \mathbf{a} (und auf \mathbf{b}). Das Skalarprodukt von \mathbf{a} mit einem Vektor senkrecht zu \mathbf{a} verschwindet gemäss (A.11).

*** Beispiel: Normale zur Ebene**

Falls eine Ebene E gegeben ist durch die Parameterdarstellung $\mathbf{r}(s, t) = \mathbf{a} + s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2$, so berechnet sich ihr Normalenvektor \mathbf{n} zu

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2.$$



*** Bemerkung: Identitäten für das Kreuzprodukt**

Es gelten die folgenden Identitäten für Kreuzprodukte von nichtverschwindenden Vektoren:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \text{ (Anti-Kommutativität),} \tag{A.22}$$

$$(s\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = s(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (s\mathbf{b}) \text{ für } s \in \mathbb{R} \text{ (Assoziativität).} \tag{A.23}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \text{ (Distributivität),} \tag{A.24}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \text{ oder } \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ oder } \mathbf{b} = \mathbf{0}, \tag{A.25}$$

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_z \text{ etc.} \tag{A.26}$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \text{ ist die Fläche des von } \mathbf{a} \text{ und } \mathbf{b} \text{ aufgespannten Parallelogramms.} \tag{A.27}$$

*** Aufgabe: Beweise der Identitäten**

Leiten Sie die Identitäten (A.22), (A.23), (A.25), (A.26) und (A.27) aus der geometrischen Definition des Kreuzprodukts her. (Die Distributivität (A.24) ist schwieriger, s.u.)

*** Bemerkung: Herleitung der Komponentenformel**

Es ist nicht offensichtlich, wie man die Komponentenformel (A.21) korrekt aus der Definition des Vektorprodukts herleitet (verschiedene Bücher unterschlagen den springenden Punkt). Oft überlegt man sich zuerst die Identitäten (A.22) bis (A.27). Dann verwendet man die Assoziativität und Distributivität, um die Berechnung auf die Gleichungen (A.26) für die Einheitsvektoren zurückzuführen:

$$(\mathbf{a}_x \mathbf{e}_x + \mathbf{a}_y \mathbf{e}_y + \mathbf{a}_z \mathbf{e}_z) \times (\mathbf{b}_x \mathbf{e}_x + \mathbf{b}_y \mathbf{e}_y + \mathbf{b}_z \mathbf{e}_z) = \mathbf{a}_x \mathbf{b}_x \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x + \mathbf{a}_x \mathbf{b}_y \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y + \dots = 0 + \mathbf{a}_x \mathbf{b}_y \mathbf{e}_z + \dots$$

Das Einsetzen aller 9 Summanden ist reine Fleissarbeit. Schwieriger ist die Herleitung der Distributivität (A.24) aus der geometrischen Definition (Achtung: Anwendung von (A.21) ergäbe einen Zirkelschluss!). Eine Beweisvariante findet sich in http://de.wikibooks.org/wiki/Vektoralgebra,_Teil_3:_Multiplikation_von_Vektoren.

Man kann *umgekehrt* auch die Komponentenformel (A.21) als Definition des Kreuzprodukts auffassen. Dann folgen (A.22) bis (A.26) durch reines Ausrechnen. Der aus (A.21) berechnete Vektor ist senkrecht auf \mathbf{a} und \mathbf{b} , die drei bilden ein positiv orientiertes Dreiein. (A.27) oder (A.20) ergeben sich aus der Berechnung von

$$|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 (\sin \varphi)^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 (1 - (\cos \varphi)^2) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = \dots = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2.$$

*** Bemerkung: Abstandsrechnung mit der Geradengleichung**

Der Abstand Punkt-Gerade kann auch mittels der Geradengleichung bestimmt werden. Obwohl diese Rechnung komplizierter ist, wollen wir sie übungshalber durchführen.

Dazu betrachten wir (gemäß *Beispiel: Parameterdarstellung einer Geraden* auf Seite 109) die Geradengleichung in der Parameterform

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{OP} + t\mathbf{e}.$$

Nun suchen wir den Wert t_1 des Parameters t , so dass $\mathbf{r}(t_1)$ auf den kleinsten Abstand zu liegen kommt, der Endpunkt also in T liegt. Es muss also $\mathbf{r}(t_1)$ senkrecht auf \mathbf{e} stehen:

$$\mathbf{r}(t_1) \cdot \mathbf{e} = 0.$$

In Komponenten heisst das:

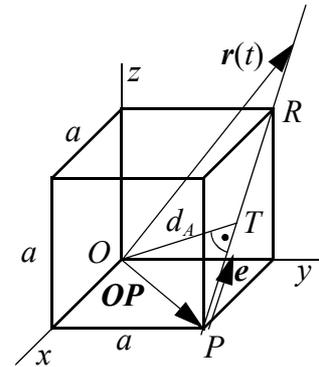
$$\left((a, a, 0) + \frac{t_1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1) \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1) \right) = 0.$$

Wir rechnen das Skalarprodukt aus und ermitteln daraus den zu T gehörigen Parameterwert t_1 .

$$-\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{t_1}{2}((-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1) = -\frac{a}{\sqrt{2}} + t_1 = 0, \text{ also } t_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Somit ist

$$\mathbf{r}(t_1) = (a, a, 0) + \frac{a}{2}(-1, 0, 1) = a\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) \text{ und } |\mathbf{r}(t_1)| = |a|\left|\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)\right| = \frac{\sqrt{6}}{2}a = \sqrt{\frac{3}{2}}a.$$



A.6 Mehrfache Produkte

Das *gemischte Produkt* $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ (*Spatprodukt*) ist eine Zahl. Durch zyklische Vertauschung der Vektoren ändert sich nichts am Resultat:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}). \tag{A.28}$$

Das *doppelte Vektorprodukt* $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ ist ein Vektor. Es gilt die Umrechnung:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}. \tag{A.29}$$

*** Aufgabe: Beweise für die Identitäten**

Verifizieren Sie die Identitäten (A.28) und (A.29). Führen Sie dazu die Vektoren in Komponentenschreibweise ein. Berechnen Sie die Kreuzprodukte bzw. Skalarprodukte mit den entsprechenden Formeln (A.12) und (A.21). Hier ist das Verwenden eines CAS-Rechners oder -Programms (z.B. Mathematica, Maple) erlaubt.

*** Bemerkung: Weitere Eigenschaften des gemischten Produkts**

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \text{ (Determinante),} \tag{A.30}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \text{ ist das Volumen des aufgespannten Parallelepipeds,} \tag{A.31}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) = 0. \tag{A.32}$$

Appendix B: Zum Energiesatz

Eine allgemeine Form des Energiesatzes kann direkt aus dem Prinzip der virtuellen Leistungen abgeleitet werden. Im Modell eines konservativen Systems folgt ebenso strikt die Erhaltung der Summe aus kinetischer und potentieller Energie. Hier ist die Energieerhaltung also kein Postulat sondern eine Folge des allgemeineren Prinzips. Zur Illustration dieser Zusammenhänge und als Anwendungsbeispiel der Vektoranalysis sind in diesem Appendix einige Abschnitte zusammengestellt, welche früher Teil der Vorlesung waren. Sie sollen der interessierten Leserschaft als Vertiefung und Referenz dienen.

B.1 Allgemeine Form

Lernziele

- Sie kennen den Energiesatz in seiner allgemeinen Form und können ihn anwenden.
- Sie können sich unter Vektorfeldern und Skalarfeldern etwas vorstellen und kennen Beispiele.
- Sie können die im Skript erwähnten Beispiele von Potentialfunktionen in konkreten Systemen berechnen.
- Sie können konservative Kräfte identifizieren und kennen Beispiele von nichtkonservativen Kräften.
- Sie können konservative Systeme beschreiben und identifizieren und für sie den Energiesatz formulieren.
- Sie können in konservativen Systemen mit dem Energiesatz einen Zusammenhang zwischen Lagekoordinaten und deren Ableitungen herleiten.
- Sie können mit dem Energiesatz die Bewegungsdifferentialgleichungen von konservativen Systemen herleiten.

Wenn wir das PdvL für die *wirklichen Geschwindigkeiten* formulieren (und deshalb die Tilden weglassen), so ergibt sich

$$\mathcal{P}^{(i)} + \mathcal{P}^{(a)} + \mathcal{P}^{(t)} = 0. \quad (\text{B.1})$$

In $\mathcal{P}^{(t)}$ haben wir jetzt, im Gegensatz zu (3.8), einen Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeiten und den Beschleunigungen:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}.$$

Diesen können wir weiter verwenden:

$$\mathcal{P}^{(t)} = -\iiint (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) dm = -\iiint (\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}) dm = -\frac{1}{2} \iiint \frac{d(v^2)}{dt} dm$$

oder

$$\mathcal{P}^{(t)} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \iiint v^2 dm \right). \quad (\text{B.2})$$

Die Grösse in der Klammer der rechten Seite von (B.2) definiert die gesamte **kinetische Energie** \mathcal{T} des Systems:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \iiint v^2 dm. \quad (\text{B.3})$$

Für einen *Massenpunkt* vereinfacht sich (B.3) zu

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m v^2. \quad (\text{B.4})$$

Wenn wir die Leistungen der inneren und der äusseren Kräfte (also der *wirklichen* Kräfte) zu \mathcal{P} zusammenfassen,

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^{(i)} + \mathcal{P}^{(a)},$$

so erhalten wir aus (B.1) und (B.2) den **Energiesatz** in der allgemein gültigen Form

$$\boxed{\dot{\mathcal{T}} = \mathcal{P}}. \quad (\text{B.5})$$

In dieser Formulierung stellt der Energiesatz eine Beziehung zwischen der Leistung der wirklichen inneren und äusseren Kräfte und der Änderung der kinetischen Energie dar. Für *Massenpunkte* lässt er sich aus dem Newtonschen Gesetz herleiten, ist also keine davon unabhängige Gleichung.

Beispiel: Mathematisches Pendel

Im Fall des Pendels (siehe *Beispiel: Mathematisches Pendel* auf Seite 83) beträgt die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = l\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi.$$

Damit wird die kinetische Energie

$$\mathcal{T} = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2.$$

Nur die Gewichtskraft hat bei der wirklichen Bewegung eine Leistung:

$$\mathcal{P} = -mgl\dot{\varphi}\sin\varphi.$$

Der Energiesatz (B.5) sagt hier also

$$m l^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} = -mgl\dot{\varphi}\sin\varphi.$$

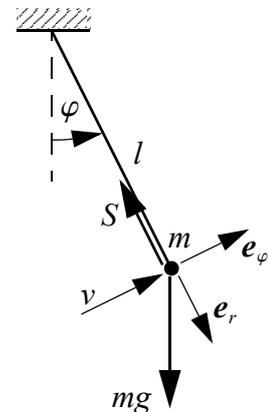
Mit der Definition (3.24) der Kreisfrequenz, also

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

ergibt sich wieder die Bewegungsdifferentialgleichung (3.18):

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0.$$

Wir können also im Fall dieses Massenpunktes auch umgekehrt die Bewegungsgleichung aus dem Energiesatz herleiten.



B.2 Konservative Systeme

Für viele Rechnungen sind Aussagen hilfreich, die sich direkt auf die Energie beziehen, wo also keine zeitlichen Ableitungen vorkommen. Dazu wäre es nützlich, die rechte Seite von (B.5), also die Leistung der inneren und äusseren Kräfte, auch als zeitliche Ableitung zu schreiben. Dann könnten wir die Gleichung integrieren. Dies gelingt unter gewissen Voraussetzungen, die wir nun besprechen wollen. Dazu müssen wir zuerst einige neue Begriffe einführen.

Wir betrachten ein **Kraftfeld** $F(\mathbf{r})$: In jedem Punkt des Raumes ist ein Kraftvektor gegeben, wie z.B. bei der Gewichtskraft. F ist damit ein **Vektorfeld**, mathematisch gesprochen eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{r} &\mapsto F(\mathbf{r}) \end{aligned} .$$

Man nennt $F(\mathbf{r})$ ein **konservatives Kraftfeld** wenn es sich als (negativer) Gradient einer **Potentialfunktion** $\mathcal{V}(\mathbf{r})$ schreiben lässt:

$$F(\mathbf{r}) = -\mathbf{grad}(\mathcal{V}(\mathbf{r})) = -\nabla\mathcal{V} . \quad (\text{B.6})$$

In kartesischen Koordinaten bedeutet das

$$F(x, y, z) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{V}(x, y, z), \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{V}(x, y, z), \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{V}(x, y, z)\right) . \quad (\text{B.7})$$

Die Potentialfunktion $\mathcal{V}(\mathbf{r})$ ist ein **Skalarfeld**: Hier ist in jedem Punkt des Raumes ein skalarer Wert gegeben.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{r} &\mapsto \mathcal{V}(\mathbf{r}) \end{aligned} .$$

Bei einem beliebigen Vektorfeld können in jedem Raumpunkt drei Komponenten festgelegt werden. Deshalb ist es ein sehr spezieller Fall, wenn diese drei Komponenten gerade der Gradient einer Potentialfunktion sind.

Die zu einem konservativen Kraftfeld gehörige Potentialfunktion ist nur bis auf eine additive Konstante bestimmt, die bei der Ableitung in (B.6) wieder aus der Rechnung fällt. Diese **Normierungskonstante** kann man frei festlegen.

Bevor wir mit unseren Überlegungen zum Energiesatz weiterfahren, betrachten wir einige Beispiele für konservative Kraftfelder.

Beispiel: Homogenes Schwerfeld

Falls wir die z-Richtung vertikal annehmen und das Schwerfeld homogen modellieren, so ist das Kraftfeld G an einem Massenpunkt der Masse m gegeben durch

$$G = (0, 0, -mg) . \quad (\text{B.8})$$

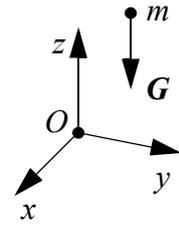
Als Potentialfunktion setzen wir

$$\mathcal{V}_H = mgz$$

an. Die Berechnung des negativen Gradienten gemäss (B.7) ergibt tatsächlich

$$\mathbf{G} = -\mathbf{grad}(\mathcal{V}_H).$$

Es liegt also ein konservatives Kraftfeld vor.



Beispiel: Newtonsches Potential

Falls man sich für das Schwerfeld im Grossen interessiert, so muss die Gravitationskraft genauer modelliert werden. Schon Newton erkannte das Gesetz, nach dem sich zwei Körper der Massen m_1 und m_2 im Abstand r mit einer Kraft vom Betrag

$$F_G(r) = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{B.9}$$

anziehen. Dabei ist G die **Gravitationskonstante** ($\sim 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$). Die Formel (B.9) liefert den *Betrag* der Kraft; die *Richtung* des Kraftvektors ist durch die Verbindungsgerade der beiden Körper gegeben.

Beim Gravitationsfeld handelt es sich ebenfalls um ein konservatives Kraftfeld. Die zugehörige Potentialfunktion ist nämlich

$$\mathcal{V}_G(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}, \tag{B.10}$$

wie wir durch eine kleine Rechnung verifizieren können. Wir notieren vorerst, dass

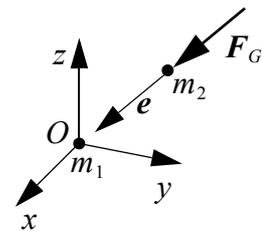
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

gilt und deshalb z.B.

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial x} r = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{r} 2x = -\frac{1}{r^2} \frac{x}{r}.$$

Der negative Gradient der Potentialfunktion der Masse m_2 ist also

$$\begin{aligned} -\mathbf{grad}(\mathcal{V}_G(x, y, z)) &= -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(-G \frac{m_1 m_2}{r}\right) \\ &= G m_1 m_2 \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \frac{1}{r} = -G m_1 m_2 \frac{1}{r^2} \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) \\ &= G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}. \end{aligned}$$



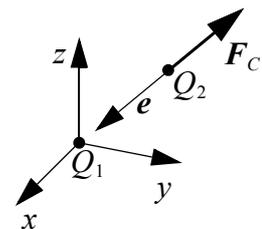
Dabei ist der Vektor $\mathbf{e} = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$ gerade der Einheitsvektor, welcher die Richtung der Kraft festlegt.

Beispiel: Coulombsches Potential

Das Coulombsche Kraftgesetz (1.20) für zwei beliebig geladene Punktladungen Q_1 und Q_2 ist völlig analog zu (B.9):

$$\mathbf{F}_C = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \mathbf{e}.$$

Wir haben es hier vektoriell und so geschrieben, dass es für positive und negative Ladungen funktioniert. In Analogie zu (B.10) sehen wir sofort, dass das **Coulombsche Potential**



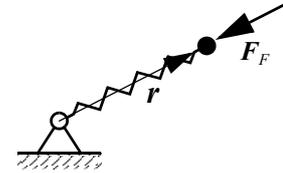
$$\mathcal{V}_c(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r}$$

sein muss.

Beispiel: Federkraft

Ein anderes, immer wieder vorkommendes konservatives Kraftfeld ist dasjenige der (linearen) Feder (3.25). Falls die ungespannte Länge null ist, so können wir das **Federgesetz** folgendermassen schreiben:

$$\mathbf{F}_F = -c\mathbf{r}.$$



Die Materialgrösse c heisst **Federkonstante** oder **Federsteifigkeit**. Die Potentialfunktion ist hier

$$\mathcal{V}_F = \frac{cr^2}{2}.$$

Bemerkungen

Als Motivation zum späteren Studium der zugehörigen Mathematik merken wir an, dass unter geeigneten Voraussetzungen ein konservatives Kraftfeld gemäss (B.6) gleichbedeutend ist mit einem **konservatives Feld**, für welches das Arbeitsintegral auf jedem geschlossenen Weg verschwindet

$$\oint (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}) = 0, \quad (\text{B.11})$$

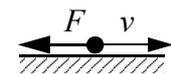
oder mit einem **wirbelfreien Feld**, dessen Rotation verschwindet:

$$\text{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Es gibt auch **innere Kräfte**, die sich durch Gradientenbildung aus einem Potential ergeben, z.B. die elastischen Deformationskräfte.

Beispiel: Gleitreibungskraft

Gleitreibungskräfte sind **nicht konservativ**: Eine konservative Kraft muss aus dem Gradienten einer Potentialfunktion berechnet werden können, die nur von der *Lage* des Angriffspunktes und nicht von seiner Geschwindigkeit abhängt. Die Gleitreibungskraft ist aber immer umgekehrt zur Geschwindigkeit gerichtet und damit von der Geschwindigkeit abhängig.



Aus der Richtung der Gleitreibungskraft ersieht man – alternativ dazu und fast noch einfacher –, dass das Arbeitsintegral für jeden nichttrivialen Weg negativ ist, also insbesondere auch für einen geschlossenen Weg (B.11).

Wir nennen von konservativen Kraftfeldern ausgeübte Kräfte **konservative Kräfte**. Ein **konservatives System** ist definiert als ein System, bei dem alle inneren und äusseren Kräfte sowie die Bindungskräfte konservativ sind oder keine Arbeit leisten.

In einem konservativen System können wir die Leistung einfach berechnen. Falls nur eine Kraft \mathbf{F} an einem materiellen Punkt \mathbf{r} angreift, so lässt sie sich schreiben als

$$\mathbf{F} = -\nabla\mathcal{V}(\mathbf{r}).$$

Aus den Ableitungsregeln erhalten wir für die zeitliche Ableitung des Potentials bei einer Bewegung $\mathbf{r}(t)$

$$\dot{\mathcal{V}} = \frac{d}{dt}\mathcal{V}(\mathbf{r}(t)) = \nabla\mathcal{V}(\mathbf{r}) \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -\mathcal{P}. \quad (\text{B.12})$$

Diese Rechnung können wir auch für das **Gesamtpotential** \mathcal{V} mehrerer konservativer Kraftfelder an einem System durchführen. Im Fall von N diskreten Kräften \mathbf{F}_i mit Angriffspunkten \mathbf{r}_i ($i = 1, \dots, N$) gilt

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_{\mathbf{r}_i}\mathcal{V}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N).$$

Die Geschwindigkeiten der Kraftangriffspunkte sind $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$. Damit wird

$$\frac{d}{dt}\mathcal{V}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_{i=1}^N \nabla_{\mathbf{r}_i}\mathcal{V}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{r}_i = -\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i = -\mathcal{P}. \quad (\text{B.13})$$

Gemäss (2.3) steht auf der rechten Seite von (B.12) oder (B.13) die negative Gesamtleistung \mathcal{P} der (inneren und äusseren) konservativen Kräfte. Es gilt also:

$$\mathcal{P} = -\dot{\mathcal{V}}.$$

Zusammen mit (B.5) ergibt sich

$$\dot{\mathcal{T}} + \dot{\mathcal{V}} = 0$$

und daraus der **Energiesatz für konservative Systeme**

$$\boxed{\mathcal{E} = \mathcal{T} + \mathcal{V} = \text{konst.}}. \quad (\text{B.14})$$

In einem *konservativen System* bleibt also während der Bewegung die Summe der kinetischen und der potentiellen Energie konstant. Durch Vergleich der gesamten Energie zu zwei geeigneten Zeitpunkten kann man oft ohne Integration der Bewegungsgleichungen nützliche Schlüsse ziehen.

Beispiel: Parabolische Schnelligkeit

Wir betrachten die Bewegung eines Massenpunktes im Newtonschen Potential (B.10) der Erde. Auf der Erdoberfläche werde er mit der Anfangsschnelligkeit v_0 vertikal nach oben geschossen. Die Luftreibung und die Rotation der Erde werden vernachlässigt. Welche Höhe erreicht er?

Wir bezeichnen mit m_E für die Masse und mit R_E den Radius der Erde. Gemäss (B.9) ist die Gravitationskraft auf den Massenpunkt mit Masse m in der Höhe r über dem Erdmittelpunkt betragsmässig

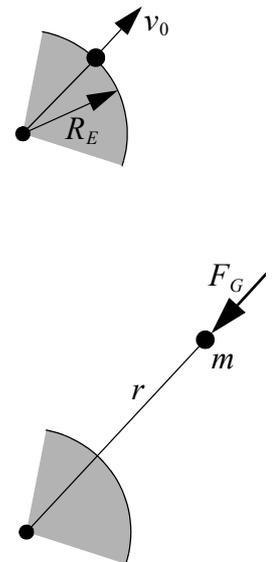
$$F_G = G \frac{mm_E}{r^2}.$$

Das System ist konservativ, es gilt also der Energiesatz in der Form (B.14). Beim Abschuss ist die Gesamtenergie gemäss (B.4) und (B.10)

$$\mathcal{E} = \mathcal{T} + \mathcal{V} = m \frac{v_0^2}{2} - G \frac{mm_E}{R_E}.$$

Im höchsten Punkt $r = r_{\max}$ kommt die Vertikalbewegung zur Ruhe. Die kinetische Energie wird dort also null und die Gesamtenergie

$$\mathcal{E} = \mathcal{T} + \mathcal{V} = -G \frac{mm_E}{r_{\max}}.$$



Damit ergibt sich für die maximale Höhe über dem Erdmittelpunkt

$$r_{\max} = \left(\frac{1}{R_E} - \frac{v_0^2}{2Gm_E} \right)^{-1}. \quad (\text{B.5})$$

Hier ist interessant, dass die Höhe gegen unendlich strebt für

$$v_0 \rightarrow \sqrt{\frac{2Gm_E}{R_E}}.$$

Man nennt

$$v_{\infty} = \sqrt{\frac{2Gm_E}{R_E}}$$

die **parabolische Schnelligkeit** oder **Fluchtschnelligkeit**. Weil auf der Erdoberfläche die homogen modellierte Gewichtskraft (B.8) mit der exakten Gewichtskraft (B.9) zusammenfällt, gilt für die Erdbeschleunigung g

$$g = \frac{Gm_E}{R_E^2}.$$

Damit vereinfacht sich die parabolische Schnelligkeit zu

$$v_{\infty} = \sqrt{2gR_E} \approx 11.2 \text{ km/s}.$$

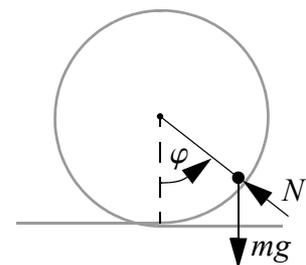
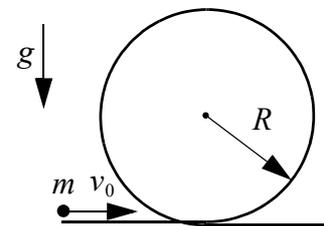
Für $v_0 < v_{\infty}$ erreicht der Massenpunkt also die maximale Höhe $r_{\max} - R_E$ (siehe (B.15)) über der Erdoberfläche und fällt dann zurück. Für $v_0 = v_{\infty}$ kommt der Massenpunkt nicht mehr zurück. $v_0 > v_{\infty}$ wird die maximale Höhe formal negativ. Es wird also bei keiner physikalisch sinnvollen Höhe ein Maximum angenommen; der Massenpunkt kommt nicht mehr zurück.

Beispiel: Achterbahn

Moderne Achterbahnen fahren auch Loopings. Das ist mit normalen, einseitig bindenden Schienen möglich.

Wie gross muss die horizontale Anfangsgeschwindigkeit sein, damit kein Absprung stattfindet?

1. Wir modellieren den Wagen als Massenpunkt und vernachlässigen die Reibung. Er ist unser System.
2. Weiteres Freischneiden ist nicht nötig.
3. Die am Massenpunkt angreifenden Kräfte sind in der Skizze in allgemeiner Lage eingezeichnet.
4. Der Freiheitsgrad ist eins. Die Lage wird durch den Winkel φ gemäss Skizze beschrieben.
5. Kinematische Relationen sind nicht relevant.
6. Wir formulieren das Newtonsche Bewegungsgesetz in tangentialer und in radialer Richtung (nach innen positiv).



$$\text{Tangential: } mR\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi.$$

$$\text{Radial nach innen: } mR\dot{\varphi}^2 = N - mg\cos\varphi.$$

Um die Aufgabe zu lösen, muss $N(t)$ oder $N(\varphi)$ berechnet werden. Dazu brauchen wir $\dot{\varphi}^2(t)$ oder $\dot{\varphi}^2(\varphi)$. Weil die tangentialer Bewegungsgleichung derjenigen des nichtlinearen Pendels (3.18) entspricht, können wir auf keine elementare Lösung für $\varphi(t)$ hoffen. Im Prinzip ist es möglich, aus der tangentialen Bewegungsgleichung mit Hilfe von

$$\frac{d}{dt}\dot{\varphi}^2 = 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}$$

eine Gleichung für $\dot{\varphi}^2$ zu gewinnen.

Direkter ist für dieses konservative System aber der Energiesatz. Wir formulieren ihn in der Form (B.14):

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mR^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgR(1 - \cos\varphi).$$

7. Der Energiesatz liefert

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{R^2}(v_0^2 - 2gR(1 - \cos\varphi)).$$

Damit wird

$$N = m\left(\frac{v_0^2}{R} - 2g(1 - \cos\varphi) + g\cos\varphi\right),$$

$$N = m\left(\frac{v_0^2}{R} + g(3\cos\varphi - 2)\right).$$

8. Die Lösung des Anfangswertproblems ist nicht gesucht.

9. Wenn die Normalkraft negativ wird, so findet ein Absprung statt. Sie muss also immer positiv sein:

$$N > 0 \leftrightarrow v_0^2 > Rg(2 - 3\cos\varphi).$$

Diese Bedingung ist am strengsten, wenn $\varphi = \pi$ wird. Dort ergibt sich

$$v_0^2 > 5Rg.$$

(Falls der Wagen an der Schiene festgehalten wäre, so würde die kleinere Schnelligkeit $v_0^2 > 4Rg$ genügen, um den höchsten Punkt zu erreichen. Diese Schnelligkeit setzt aber eine negative Normalkraft voraus.)

Beispiel: Schwingung

Ein Massenpunkt hängt an einer Feder (ungespannte Länge null, Federkonstante c) und gleitet reibungsfrei auf einer kreisförmigen Führung.

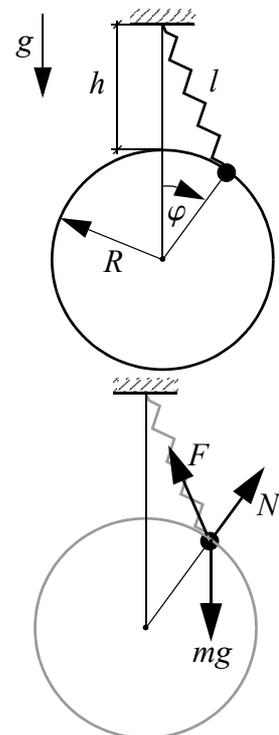
Gesucht ist die Bewegungsdifferentialgleichung und eine Bedingung für h , so dass eine Schwingung um die höchste Lage stattfindet.

1. System: Massenpunkt.
2. Weiteres Freischneiden ist nicht nötig.
3. Die Kräfte in allgemeiner Lage sind gemäss Skizze eingeführt.
4. Der Freiheitsgrad ist eins. Als Lagekoordinate dient der Winkel φ gemäss Skizze.
5. Kinematische Relationen sind nicht relevant.
6. Die Verwendung des Energiesatzes ist einfacher als das Aufstellen des Newtonschen Gesetzes.

Das System ist konservativ. Wir können den Energiesatz gemäss (B.14) formulieren:

$$\frac{m}{2}(R\dot{\varphi})^2 + \frac{c}{2}l^2 - mgR(1 - \cos\varphi) = \mathcal{E}.$$

Für den Abstand l benutzen wir den Kosinussatz in der folgenden Form:



$$l^2 = (R + h)^2 + R^2 - 2R(R + h)\cos\varphi.$$

Diese Gleichung setzen wir in den Energiesatz ein und leiten dann nach der Zeit ab. Es ergibt sich

$$mR^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + cR(R + h)\dot{\varphi}\sin\varphi - mgR\dot{\varphi}\sin\varphi = 0.$$

Wir erhalten also wieder eine zum *Beispiel: Mathematisches Pendel* auf Seite 83 analoge Gleichung:

$$\ddot{\varphi} + \kappa\sin\varphi = 0.$$

Die hier vorkommende Kreisfrequenz κ ist gegeben durch

$$\kappa = \frac{R + h}{R} \frac{c}{m} - \frac{g}{R}.$$

7. Bindungskräfte sind nicht gesucht.
8. Eine Lösung der Bewegungsdifferentialgleichungen ist nicht gefragt. Wichtig ist aber die Diskussion:
9. Falls die Grösse κ positiv ist, so kann mit $\omega^2 = \kappa$ die Lösung (3.21) des Pendels wiederholt werden.
Falls hingegen κ negativ wird, so ergibt sich mit $\omega^2 = -\kappa$ eine linearisierte Gleichung (für kleine Auslenkungen) der Form

$$\ddot{\varphi} - \omega^2\varphi = 0.$$

Diese wird von Exponentialfunktionen (oder hyperbolischen Funktionen) gelöst. Es findet keine Schwingung statt. Die Bedingung für eine Schwingung um die höchste Lage ist also

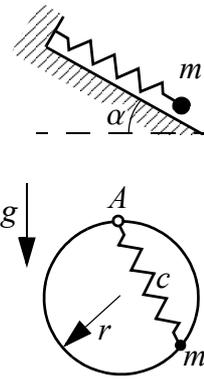
$$\kappa > 0 \leftrightarrow R + h > \frac{mg}{c}.$$

Kontrollfragen

1. Wie ist die kinetische Energie eines Massenpunktes definiert?
2. Wie lautet der Energiesatz in seiner ersten Form?
3. Wie lautet der Energiesatz in seiner integrierten Form?
4. Wie berechnet sich das Differential der kinetischen Energie?
5. Wie ist die Arbeit definiert?
6. Für welche Kraftfelder ist das Arbeitsintegral vom Weg unabhängig?
7. Wie ist ein konservatives Kraftfeld definiert?
8. Wie ist ein wirbelfreies Kraftfeld definiert?
9. Wie ist ein konservatives Kraftfeld definiert?
10. Wie berechnet sich die Kraft aus dem Potential?
11. Wie berechnet sich das Potential eines konservativen Kraftfeldes?
12. Ist ein konservatives Kraftfeld wirbelfrei?
13. Wie berechnet sich das Arbeitsintegral von P nach Q eines konservativen Kraftfeldes aus dem Potential?
14. Was ist ein konservatives mechanisches System?
15. Wie lautet der Energiesatz für konservative Systeme?
16. Welche Formen des Energiesatzes sind immer gültig?
17. Ist ein Auto ein konservatives mechanisches System?

Übungen

- Wir betrachten noch einmal den Massenpunkt auf einer schiefen Ebene (siehe Aufgabe 3. auf Seite 90). Ist das System konservativ? Formulieren Sie den Energiesatz und berechnen Sie daraus die Differentialgleichung der Bewegung!
- Betrachten Sie den Massenpunkt auf einer Kreisbahn Aufgabe 4 auf Seite 90. Ist das System konservativ? Führen Sie einen Lagewinkel φ ein, der im Minimum des Potentials verschwindet und berechnen Sie die gesamte potentielle Energie $\mathcal{V}(\varphi)$!
Formulieren Sie den Energiesatz und zeigen Sie, dass die Bewegungsdifferentialgleichung mit derjenigen des mathematischen Pendels übereinstimmt. Welches ist die Kreisfrequenz einer kleinen Schwingung um die Ruhelage?



- Ein räumliches Kraftfeld hat die Komponenten

$$F_x = \frac{a}{2}x^2 - byz,$$

$$F_y = cxy + ax,$$

$$F_z = -dxy + dz^3.$$

Für welche Werte der Konstanten a, b, c und d ist es wirbelfrei? Finden Sie das zugehörige Potential $\mathcal{V}(x, y, z)$!

- Ein ebenes Kraftfeld besitzt das Potential $\mathcal{V}(x, y) = cxy$. Finde die Komponenten der Kraft \mathbf{F} ! Finden Sie die Bewegung eines Massenpunktes m , der sich in diesem Kraftfeld bewegt und den Ursprung mit der Geschwindigkeit v_0 in x -Richtung verlässt!

B.3 Rotation

Lernziele

- Sie können bei ebenen Bewegungen die kinetische Energie in Translationsenergie und relative kinetische Energie zerlegen und berechnen.
- Sie können in konservativen ebenen Systemen aus dem Energiesatz einen Zusammenhang zwischen den Lagekoordinaten und deren Ableitungen herleiten.

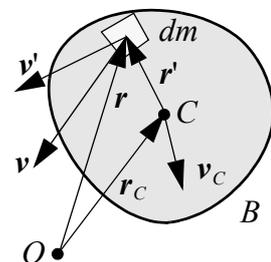
Wir wollen nun noch die *kinetische Energie* genauer betrachten. Für starre Körper und speziell für ebene Bewegungen lässt sie sich gegenüber dem Integral (B.3)

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \iiint_B v^2 dm$$

wesentlich vereinfachen. Wir zerlegen vorerst ganz allgemein die Geschwindigkeitsvektoren der Massenelemente gemäß

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}'$$

und erhalten



$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \iiint_B ((\mathbf{v}_C + \mathbf{v}') \cdot (\mathbf{v}_C + \mathbf{v}')) dm = \frac{m}{2} v_C^2 + \frac{1}{2} \iiint_B v'^2 dm + \mathbf{v}_C \cdot \iiint_B \mathbf{v}' dm.$$

Wegen (3.39) verschwindet das Integral im letzten Summanden. Der erste Summand entspricht der kinetischen Energie des auf den Massenmittelpunkt geschrumpften Körpers. Man nennt diesen Anteil die **Translationsenergie** \mathcal{T}_t des Körpers:

$$\mathcal{T}_t = \frac{m}{2} v_C^2. \quad (\text{B.16})$$

Den zweiten Summanden nennt man die **relative kinetische Energie** \mathcal{T}_r :

$$\mathcal{T}_r = \frac{1}{2} \iiint_B v'^2 dm. \quad (\text{B.17})$$

Zusammenfassend ist also

$$\boxed{\mathcal{T} = \mathcal{T}_t + \mathcal{T}_r} \quad (\text{B.18})$$

Falls wir einen *starren Körper* betrachten, der sich mit Kinemate $\{\mathbf{v}_O, \boldsymbol{\omega}\}$ bewegt, so berechnen wir die relative kinetische Energie folgendermassen weiter:

$$\frac{1}{2} \iiint_B v'^2 dm = \frac{1}{2} \iiint_B (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}') dm = \frac{1}{2} \iiint_B (\mathbf{v}' \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')) dm = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \iiint_B \mathbf{r}' \times \mathbf{v}' dm = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_C,$$

also

$$\mathcal{T}_r = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_C. \quad (\text{B.19})$$

Bei der *ebenen Bewegung eines starren Körpers* wird die Berechnung der relativen kinetischen Energie wegen (B.19) noch einfacher:

$$\mathcal{T}_r = \frac{1}{2} I_C \omega^2. \quad (\text{B.20})$$

Beispiel: Rollendes Rad

Ein rollendes Rad ($v_C = r\omega$) hat also die kinetische Energie

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_t + \mathcal{T}_r = \frac{m}{2} v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2.$$

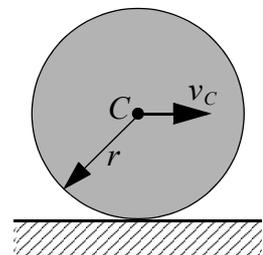
Für ein *homogenes* Rad mit

$$I_C = \frac{mr^2}{2}$$

(siehe (3.48)) ergibt sich

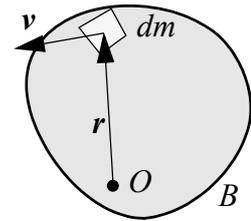
$$\mathcal{T} = \frac{m}{2} v_C^2 + \frac{1}{2} \frac{mr^2}{2} \omega^2 = \frac{3m}{4} v_C^2.$$

Der Anteil der Translationsenergie ist bei dieser Massenbelegung also doppelt so gross wie derjenige der relativen kinetischen Energie (siehe Kontrollfrage 4 auf Seite 131).



Im Fall einer *Rotation* um den Punkt O ist die Geschwindigkeit eines Massenelementes dm

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$



Eine analoge Rechnung wie oben ergibt für die gesamte kinetische Energie

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2} \iiint_B \mathbf{v}^2 dm = \frac{1}{2} \iiint_B (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) dm \\ &= \frac{1}{2} \iiint_B (\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) dm = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \iiint_B \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_O. \end{aligned}$$

Bei *ebenen Rotationen* um O wird daraus

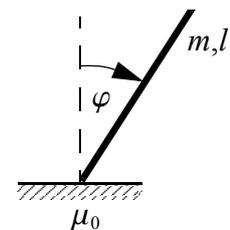
$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} I_O \omega^2. \tag{B.21}$$

Die Herleitung des allgemeinen Energiesatzes (B.5) und desjenigen für konservative Systeme (B.14) gilt nicht nur für Massenpunkte. Deshalb gelten diese Sätze insbesondere auch für starre Körper, bei denen wir mit (B.18) und (B.19) oder (B.20) die kinetische Energie sehr bequem ermitteln können.

Die Energiesätze (B.5) oder (B.14) liefern für starre Körper keine vom Drall- und Impulssatz unabhängige, neue Gleichung. Vor allem bei konservativen Systemen ist der Satz (B.14) aber trotzdem sehr nützlich, da er einer integrierten Form der Bewegungsgleichungen entspricht.

Beispiel: Fallender Balken

Ein Balken (Masse m , Länge l) wird fast vertikal auf eine raue Horizontalebene (Haftreibungskoeffizient μ_0) gestellt.

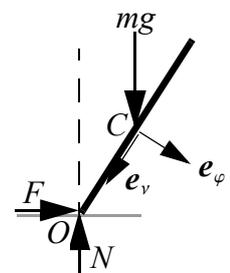


Gesucht ist seine Bewegung. Wann beginnt er zu gleiten?

1. System: Balken.
2. Weiteres Freischneiden ist nicht nötig.
3. Kräfte gemäss Skizze in allgemeiner Lage.
4. In der Haftungsphase ist der Freiheitsgrad 1. Als Lagekoordinate dient der Winkel φ .
5. Kinematische Relationen brauchen wir nicht.
6. Vor dem Rutschen ist die Bewegung eine Rotation um O . Wir formulieren deshalb den *Massenmittelpunktsatz* in tangentialer und radialer Richtung (nach innen):

$$\mathbf{e}_\varphi : m \frac{l}{2} \ddot{\varphi} = mg \sin \varphi + F \cos \varphi - N \sin \varphi ;$$

$$\mathbf{e}_r : m \frac{l}{2} \dot{\varphi}^2 = mg \cos \varphi - F \sin \varphi - N \cos \varphi .$$



Der *Drallsatz* bezüglich O ergibt mit (3.43) und (3.47):

$$\dot{L}_O = I_O \ddot{\varphi} = \frac{ml^2}{3} \ddot{\varphi} = mg \frac{l}{2} \sin \varphi.$$

Dabei rechnen wir den Drall und das Moment in positiver φ -Richtung positiv. Die mathematisch positive Richtung wäre umgekehrt; das entspricht einem Vorzeichenwechsel auf beiden Seiten der Gleichung.

Bei der Formulierung des Energiesatzes beachten wir, dass das System vor dem Gleiten konservativ ist und eine Kreiselung um O vollführt. Wir können also die kinetische Energie gemäss (B.21) berechnen und den Energiesatz in der Form (B.14) aufstellen:

$$\mathcal{T} + \mathcal{V} = \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} mgl(\cos \varphi - 1) = \text{konst.} \quad (\text{B.22})$$

Das Nullniveau des Potentials wurde dabei in der Anfangslage $\varphi = 0$ angesetzt.

(Der Energiesatz ist auch hier eine integrierte Form des Drallsatzes, denn die Ableitung der Gesamtenergie nach der Zeit ergibt:

$$I_O \ddot{\varphi} - \frac{1}{2} mgl \sin \varphi = 0.)$$

Die integrierte Form (B.22) ist aber trotzdem nützlich, da sie direkt eine Beziehung für $\dot{\varphi}^2$ liefert.

7. Wir berechnen die Bindungskräfte im nächsten Schritt.
8. Mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi(0) = \varphi_0 \cong 0 \text{ und } \dot{\varphi}(0) = 0$$

erhalten wir

$$\mathcal{T} + \mathcal{V} = 0$$

und damit

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{3g}{l}(1 - \cos \varphi).$$

Aus dem Drallsatz ergibt sich

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{2l} \sin \varphi.$$

Diese Resultate setzen wir auf den linken Seite der Gleichungen des Massenmittelpunktsatzes ein. Die Auflösung nach den unbekanntenen Bindungskräften F und N liefert

$$F = \frac{3mg}{4}(3 \cos \varphi - 2) \sin \varphi,$$

$$N = \frac{mg}{4}(3 \cos \varphi - 1)^2.$$

9. Unabhängig vom Haftreibungskoeffizienten μ_0 beginnt der Balken sicher spätestens dann zu gleiten, wenn die Normalkraft null wird. Dies tritt beim Winkel

$$\varphi = \varphi_1 = \arccos \frac{1}{3} \cong 70.53^\circ$$

ein.

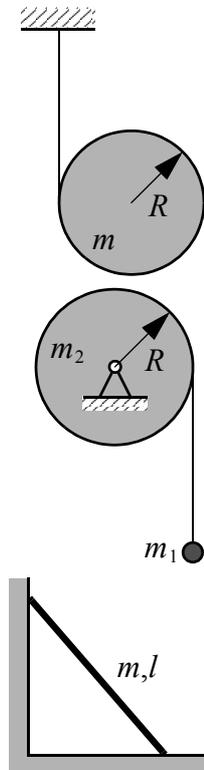
Kontrollfragen

1. Sind die Energiesätze aus Abschnitt B.1 und B.2 auch für starre Körper gültig?
2. Wie kann die kinetische Energie von starren Körpern zerlegt werden? Wie berechnet man die Teile davon?

3. Wie berechnet man die kinetische Energie bei beliebigen ebenen Bewegungen?
4. In welchem Fall ist die Translationsenergie eines rollenden Rades gleich gross wie die relative kinetische Energie? (Siehe *Beispiel: Rollendes Rad* auf Seite 128).

Übungen

1. Wir betrachten die Jo-Jo-Aufgabe von Seite 98. Formulieren Sie den Energiesatz!
2. Siehe Seite 104: Eine Körper der Masse m_1 ist an einem masselosen (undehnbaren), um eine Scheibe (Masse m_2 , Radius R) gewickelten Faden befestigt. Das Lager der homogenen Scheibe sei zuerst blockiert und werde zur Zeit $t = 0$ freigegeben. Reibungseffekte sind vernachlässigbar. Formulieren Sie den Energiesatz!
3. Siehe Seite 104: Betrachte einen homogenen Balken (Masse m , Länge l). Ein Ende gleitet reibungsfrei auf einer horizontalen und das andere auf einer vertikalen Ebene. Die Bewegung sei in eine Vertikalebene gebunden. Formulieren Sie den Energiesatz!



Appendix C: Zum Drallsatz

Für interessierte Leserinnen und Leser enthält dieser Appendix einen Einstieg in die dreidimensionale Berechnung des Dralls. Sie ist die Grundlage zum Verständnis von Kreiselproblemen (Spielzeugkreisel, Kreiselkompass, Stabilisierung des Radfahrens etc.).

Lernziele

- Sie kennen die Definitionen der Trägheitsmatrix und ihrer Elemente (bezüglich des Massenmittelpunkts und inertialer Punkte).
- Sie können bei gegebener Trägheitsmatrix und Rotationsschnelligkeit den Drall berechnen (bezüglich des Massenmittelpunkts und inertialer Punkte).
- Sie können die Drallsätze auf konkrete Probleme anwenden und daraus Bewegungsdifferentialgleichungen herleiten.
- Sie können mit dem Verschiebungssatz von Steiner Trägheitsmatrizen umrechnen.
- Sie können qualitativ grosse von kleinen Trägheitsmomenten unterscheiden.
- Sie können den Drallsatz in rotierenden (z.B. körperfesten) Koordination formulieren.
- Sie können die Stabilitätsdiskussion der Rotationen eines kräftefreien starren Körpers nachvollziehen.

C.1 Massenträgheitsmomente

Die Berechnung des Dralls mit Hilfe der Integrale (3.36) und (3.40) ist, wie wir beim physikalischen Pendel gesehen haben, ziemlich umständlich, weil für jedes System bei der Grunddefinition begonnen werden muss. In diesem Abschnitt wird eine einfachere Berechnungsweise hergeleitet, welche nur die Kinematik und die Massenverteilung des starren Körpers benötigt.

Wir haben den relativen Drall bezüglich des Massenmittelpunktes C gemäss (3.40) als

$$\mathbf{L}_C = \iiint_B \mathbf{r}' \times \mathbf{v}' dm$$

definiert. Für einen Bewegungszustand mit beliebiger Kinematik $\{\mathbf{v}_C, \boldsymbol{\omega}\}$ sind die zeitlichen Ableitungen der relativen Ortsvektoren, $\mathbf{v}' = \dot{\mathbf{r}}'$, gemäss Kreiselungsformel (1.14)

$$\mathbf{v}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

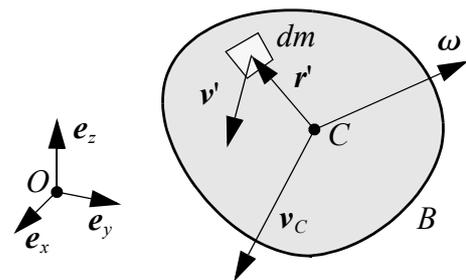
Wir setzen

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{e}_x + \omega_y \mathbf{e}_y + \omega_z \mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{r}' = x' \mathbf{e}_x + y' \mathbf{e}_y + z' \mathbf{e}_z,$$

$$r' = |\mathbf{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Mit der Vektoridentität (A.29),



$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c},$$

wird der relative Drall zu

$$\mathbf{L}_C = \iiint_B \mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') dm = \boldsymbol{\omega} \iiint_B r'^2 dm - \iiint_B \mathbf{r}' (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}') dm.$$

Daraus können wir z.B. die x -Komponente L_{Cx} des Dralls \mathbf{L}_C herauslesen. Die Summanden mit x'^2 fallen heraus, so dass noch der folgende Ausdruck stehen bleibt:

$$L_{Cx} = \omega_x \iiint_B (y'^2 + z'^2) dm - \omega_y \iiint_B x' y' dm - \omega_z \iiint_B x' z' dm. \quad (\text{C.1})$$

Die y - und z -Komponenten L_{Cy} und L_{Cz} sind analog, mit zyklisch vertauschten Indizes. Gesamthaft wird der Drall also

$$\mathbf{L}_C = L_{Cx} \mathbf{e}_x + L_{Cy} \mathbf{e}_y + L_{Cz} \mathbf{e}_z, \quad (\text{C.2})$$

mit x -Komponente (C.1) und analogen y - und z -Komponenten.

Nun wollen wir die mit ω_x , ω_y , ω_z multiplizierten Integrale in (C.1) benennen und die rechte Seite der Gleichung als Komponente eines Matrixprodukts auffassen. Dazu definieren wir die **Trägheitsmatrix** \mathbf{I}_C als

$$\mathbf{I}_C = \begin{bmatrix} I_x & C_{xy} & C_{xz} \\ C_{xy} & I_y & C_{yz} \\ C_{xz} & C_{yz} & I_z \end{bmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

Die Elemente der Trägheitsmatrix sind die (**Massen-)** **Trägheitsmomente** I_x , I_y und I_z gemäss

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_B (y'^2 + z'^2) dm, \\ I_y &= \iiint_B (x'^2 + z'^2) dm, \\ I_z &= \iiint_B (x'^2 + y'^2) dm \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

sowie die **Deviationsmomente** C_{xy} , C_{yz} und C_{xz} gemäss

$$\begin{aligned} C_{xy} &= -\iiint_B x' y' dm, \\ C_{yz} &= -\iiint_B y' z' dm, \\ C_{xz} &= -\iiint_B x' z' dm. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Die x -Komponente L_{Cx} des Dralls aus (C.1) ist also z.B.

$$L_{Cx} = I_x \omega_x + C_{xy} \omega_y + C_{xz} \omega_z.$$

Damit können wir (C.2) auch schreiben als Matrixprodukt der Trägheitsmatrix mit dem Vektor der Rotationsgeschwindigkeit:

$$\boxed{\mathbf{L}_C = \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}}. \quad (\text{C.6})$$

Die Trägheitsmatrix \mathbf{I}_C ist aus der Geometrie und der Massenbelegung des Körpers berechenbar, also eine *Materialgrösse*. Gemäss der Berechnung (C.1) wird \mathbf{I}_C automatisch *symmetrisch*.

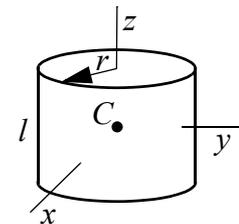
Für *spiegelsymmetrische Körper* lässt sich die Trägheitsmatrix am einfachsten berechnen, wenn man die Symmetrie in der Koordinatenwahl berücksichtigt und damit die Deviationsmomente zum Verschwinden bringt.

Beispiel: Trägheitsmomente von homogenen Körpern

Wir geben im Folgenden die Trägheitsmatrizen für die Kugel, den Zylinder und den Quader an. Durch Grenzübergänge lassen sich aus ihnen die Trägheitsmatrizen von weiteren einfachen Körpern bestimmen (z.B. schlanker Balken, ebenes Rad). Wir verzichten auf die expliziten Berechnungen der Volumenintegrale. Trägheitsmatrizen finden sich in vielen gängigen Formelsammlungen.

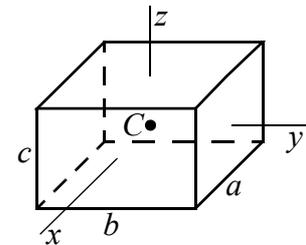
Zylinder:

$$\mathbf{I}_C = m \begin{bmatrix} \frac{l^2}{12} + \frac{r^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^2}{12} + \frac{r^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{2} \end{bmatrix}.$$



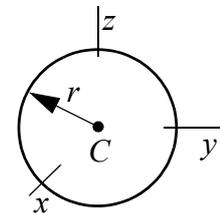
Quader:

$$\mathbf{I}_C = \frac{1}{12} m \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}.$$



Kugel:

$$\mathbf{I}_C = \frac{2}{5} m r^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Beispiel: Trägheitsmomente für ebene Bewegungen

Aus den obigen Matrizen können wir die in Abschnitt 3.5 berechneten Trägheitsmomente für ebene Bewegungen ablesen: Wenn wir z.B. beim Quader eine Kantenlänge (z.B. a) viel grösser als die anderen beiden annehmen, so bleibt für einen schlanken Stab in der x -Richtung noch

$$\mathbf{I}_C = \frac{1}{12} m \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}.$$

Für ein ebenes System in der x - y -Ebene lesen wir daraus die z -Komponente des Trägheitsmoments ab:

$$I_C = \frac{ma^2}{12}.$$

Dies deckt sich mit (3.52).

Das gleiche Resultat ergibt sich übrigens auch für einen schlanken, langgestreckten Zylinder in x - y -Ebene.

Der Impulssatz (3.30) einerseits und der Drallsatz (3.42) mit Formel (C.6) andererseits liefern damit die gesuchte Beziehung zwischen der Kinematik und der Dynamik eines starren Körpers. Zusammen mit den Anfangsbedingungen bestimmen sie seine Bewegung vollständig. Allerdings ist zu beachten, dass bei Rechnungen in einem Inertialsystem die Trägheitsmatrix nicht unbedingt konstant ist, die Ableitung des Dralls (C.6) also zwei Summanden hat. Abschnitt wird zeigen, wie man diese Klippe durch Rechnung in einem körperfesten Nichtinertialsystem umschiffen kann.

Alle obigen Resultate lassen sich analog herleiten, wenn eine Kreiselung um einen inertialen Punkt O betrachtet wird. Formal gelten also die Formeln bis (C.6) auch, wenn C durch O ersetzt wird, sowie \mathbf{r}' durch \mathbf{r} und \mathbf{v}' durch \mathbf{v} .

Kontrollfragen

1. Wie sind die Trägheitsmomente und die Deviationsmomente definiert?
2. Was ist die Trägheitsmatrix?
3. Wie berechnet sich der relative Drall aus der Rotationsgeschwindigkeit?
4. Wie berechnet sich der Drall bezüglich eines festen Punktes – im Falle einer Kreiselung um diesen Punkt – aus der Rotationsgeschwindigkeit?
5. Wie kann der Drall bezüglich eines festen Punktes für eine beliebige Bewegung aus der Rotationsgeschwindigkeit berechnet werden? (Tipp: siehe auch Abschnitt 3.4, Seite 96)

Vertiefende Fragen

1. Wann ist der Drall parallel zur Rotationsgeschwindigkeit?
2. Für welche Körper ist der Drall immer parallel zur Rotationsgeschwindigkeit?

C.2 Satz von Steiner

Der *Verschiebungssatz von Steiner* erlaubt die Umrechnung zwischen I_O und I_C :

Satz:

Der betrachtete Körper habe die Masse m . Das Koordinatensystem $\{O, x, y, z\}$ sei gegenüber dem System $\{C, x', y', z'\}$ mit Ursprung im Massenmittelpunkt C verschoben. Die Koordinaten von O im $\{C, x', y', z'\}$ -System seien $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$. Dann berechnet sich I_O aus I_C gemäss

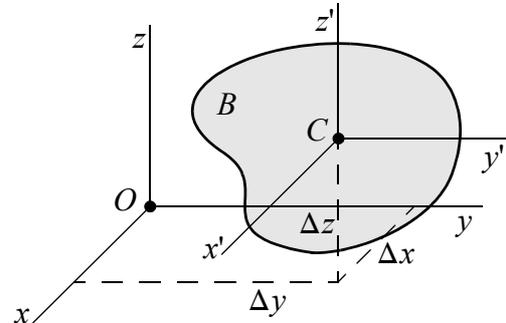
$$\mathbf{I}_O = \mathbf{I}_C + m \begin{bmatrix} \Delta y^2 + \Delta z^2 & -\Delta x \Delta y & -\Delta x \Delta z \\ -\Delta x \Delta y & \Delta x^2 + \Delta z^2 & -\Delta y \Delta z \\ -\Delta x \Delta z & -\Delta y \Delta z & \Delta x^2 + \Delta y^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

Beweis:

Der Beweis ist für alle Elemente der Trägheitsmatrix ähnlich. Wir berechnen exemplarisch I_{Ox} :

$$I_{Ox} = \iiint_B (y^2 + z^2) dm,$$

$$I_{Ox} = \iiint_B ((y' + \Delta y)^2 + (z' + \Delta z)^2) dm,$$



Da nun wegen der Definition (2.9) des Massenmittelpunktes

$$\iiint_B y' dm = \iiint_B z' dm = 0$$

ist, so erhalten wir

$$I_{Ox} = m \Delta y^2 + m \Delta z^2 + I_{Cx}. \quad \blacksquare$$

Formel (C.7) zeigt, dass die Trägheitsmomente bezüglich des Massenmittelpunktes minimal sind.

Die Trägheitsmatrix lässt sich auch auf gedrehte Koordinatensysteme umrechnen. Diese Technik verlangt aber tieferes Verständnis der Transformationseigenschaften von **Tensoren** (die Trägheitsmatrix ist eigentlich ein Tensor). Wir wollen uns nicht weiter damit beschäftigen, nehmen aber zur Kenntnis, dass man wegen der Symmetrie der Trägheitsmatrix immer ein Koordinatensystem finden kann, in dem die Deviationsmomente verschwinden («**Hauptachsen-system**»).

Kontrollfrage

1. Wie berechnen sich die Trägheitsmomente bezüglich eines translatorisch verschobenen Systems?

C.3 Rotierende Koordinaten

Bisher haben wir die zeitliche Ableitung des Dralls

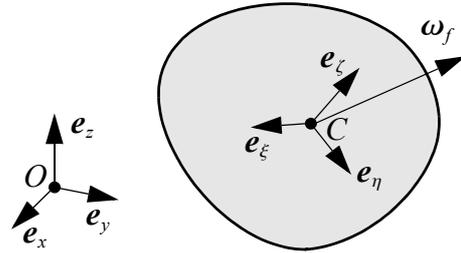
$$\dot{\mathbf{L}}_C = \frac{d}{dt}(\mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega})$$

in einem translatorisch mit C bewegten System berechnet, wo eventuell auch \mathbf{I}_C zeitabhängig ist, was die Rechnungen komplizieren würde. Bei nicht kugelsymmetrischer Trägheitsmatrix ist es daher sinnvoll, in rotierenden Koordinaten zu rechnen. Diese wählen wir so, dass die

Trägheitsmatrix während der Bewegung konstant sind. Für körperfeste Koordinaten ist das immer der Fall, manchmal bietet sich dank Symmetrie aber auch anderes System an. Im Folgenden gehen wir also von konstantem I_C , aber einem rotierenden Bezugssystem aus.

Im Fall eines mit ω_f rotierenden Systems ist zu beachten, dass sich auch die Einheitsvektoren bewegen. Wir sehen dies am besten in einem Hauptachsensystem, wo die Deviationsmomente verschwinden. Hier gilt für den Drall bezüglich des Massenmittelpunktes

$$L_C = I_{C\xi}\omega_\xi e_\xi + I_{C\eta}\omega_\eta e_\eta + I_{C\zeta}\omega_\zeta e_\zeta.$$



Die Einheitsvektoren vollführen eine Kreiselung mit ω_f . Deshalb erhalten wir für die Ableitung des Dralls (unter Annahme konstanter Trägheitsmomente)

$$\dot{L}_C = I_{C\xi}\dot{\omega}_\xi e_\xi + \dots + I_{C\xi}\omega_\xi \dot{e}_\xi + \dots$$

Mit den Relationen für die Kreiselung (siehe (1.14))

$$\dot{e}_\xi = \omega_f \times e_\xi, \text{ etc.}$$

lässt sich die obige Gleichung vektoriell schreiben als

$$\dot{L}_C = I_C \dot{\omega} + \omega_f \times I_C \omega.$$

Dabei steht $\dot{\omega}$ für die *relative* Ableitung von ω :

$$\dot{\omega} = \dot{\omega}_\xi e_\xi + \dot{\omega}_\eta e_\eta + \dot{\omega}_\zeta e_\zeta.$$

Aus (3.42) erhalten wir also den **Drallsatz im bewegten System**

$$\dot{L}_C = I_C \dot{\omega} + \omega_f \times I_C \omega = M_C. \tag{C.8}$$

Im Fall von *körperfesten Koordinaten* ist $\omega_f = \omega$ und damit

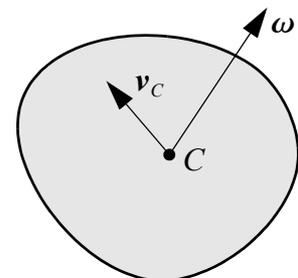
$$\dot{L}_C = I_C \dot{\omega} + \omega \times I_C \omega = M_C. \tag{C.9}$$

Dabei bezeichnet ω die absolute Rotationsgeschwindigkeit, ausgedrückt im bewegten System und $\dot{\omega}$ die relative Ableitung der Rotationsgeschwindigkeit.

Beispiel: Euler-Gleichungen, Stabilität von Rotationen

Wir betrachten die Rotation eines starren Körpers, auf den bezüglich des Massenmittelpunktes C kein Moment wirkt (indem z.B. nur die Gewichtskräfte angreifen). Seine Trägheitsmatrix bezüglich C sei (in einem mit dem Körper rotierenden Hauptachsensystem) gegeben durch:

$$I_C = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}.$$



Der Drallsatz (C.9) im mitrotierenden System schreibt sich nun komponentenweise als:

$$\begin{aligned}
 A\dot{\omega}_\xi + (C - B)\omega_\eta\omega_\zeta &= 0, \\
 B\dot{\omega}_\eta + (A - C)\omega_\zeta\omega_\xi &= 0, \\
 C\dot{\omega}_\zeta + (B - A)\omega_\xi\omega_\eta &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{C.10}$$

Dies sind die **Euler-Gleichungen**. Zusammen mit dem Massenmittelpunktsatz (3.32) beschreiben sie die Bewegung des Körpers vollständig. Die Euler-Gleichungen sind nichtlinear und deshalb schwierig zu diskutieren. Einzig konstante Rotationen um eine Koordinatenachse sind offensichtliche Lösungen von (C.10). Sie entsprechen also konstanten Rotationen um eine der Hauptachsen des Körpers. Wir wählen z.B. eine Rotation um die ξ -Achse,

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \begin{bmatrix} \omega_{\xi 0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

mit konstantem $\omega_{\xi 0}$.

Um das Vorlesungsexperiment mit dem Würfel zu verstehen, betrachten wir eine Bewegung in der Nähe dieser Rotation. Sei also

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \bar{\boldsymbol{\omega}}$$

und $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ klein. Dies setzen wir in die Euler-Gleichungen ein und *linearisieren* (d.h.: setzen Produkte der Komponenten von $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ zu null). Wir schreiben für $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ gleich wieder $\boldsymbol{\omega}$, was die Notation vereinfacht. So ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 A\dot{\omega}_\xi &= 0, \\
 B\dot{\omega}_\eta + (A - C)\omega_\zeta\omega_{\xi 0} &= 0, \\
 C\dot{\omega}_\zeta + (B - A)\omega_{\xi 0}\omega_\eta &= 0.
 \end{aligned}$$

Nun haben wir lineare Differentialgleichungen für die kleinen Veränderungen der Rotation um die ξ -Achse. Wir leiten die zweite Gleichung nach der Zeit ab,

$$B\ddot{\omega}_\eta + (A - C)\dot{\omega}_\zeta\omega_{\xi 0} = 0,$$

und setzen das Resultat für $\dot{\omega}_\zeta$ aus der dritten Gleichung ein:

$$\ddot{\omega}_\eta + \frac{(A - C)(A - B)}{BC}\omega_\eta\omega_{\xi 0}^2 = 0.$$

Analog dazu erhalten wir die Differentialgleichung für die ζ -Komponente:

$$\ddot{\omega}_\zeta + \frac{(B - A)(C - A)}{BC}\omega_\zeta\omega_{\xi 0}^2 = 0.$$

Beides sind genau dann Schwingungsgleichungen, wenn $(A - B)(A - C) > 0$ ist. Dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn entweder $A \leq B, C$ oder $A \geq B, C$ gilt, d.h., wenn die Rotation um die Achse mit dem grössten oder dem kleinsten Trägheitsmoment stattfindet.

Ein Körper mit drei verschiedenen Hauptträgheitsmomenten (z.B. eine Zigarettenpackung) rotiert also stabil um die grösste und die kleinste Hauptträgheitsachse, während die Rotation um die mittlere Hauptträgheitsachse instabil ist.

(Beachte, obwohl es hier keine Rolle spielt: Die Achse mit dem grössten Hauptträgheitsmoment ist die «kürzeste», d.h. sie durchsticht den Körper auf dem kürzesten Weg.)

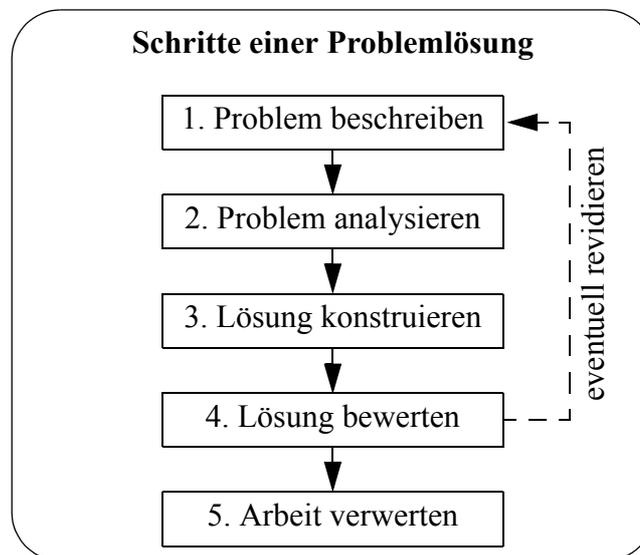
Kontrollfragen

1. Wann lohnt es sich, den Drallsatz in einem rotierenden System zu formulieren?
2. Wie lautet der Drallsatz in einem rotierenden System?

Appendix D: Problemlösung

Das Lösen von Problemen ist nicht nur in der Mechanik ein schwieriger Prozess. Für Studierende, Ingenieure und Wissenschaftler ist er das tägliche Brot, z.B. auch beim Verfassen eines Textes. Deshalb ist es sinnvoll, über den Prozess nachzudenken und aus den Erkenntnissen der Kognitionsforschung zu lernen. Das fördert die eigene Problemlösungskompetenz und erleichtert auch das Lernen.

Das folgende Schema ist inspiriert durch ein Buch von Frederick Reif («Applying Cognitive Science to Education», MIT Press, 2008).



☞ *Viele Studierende tendieren dazu, sofort den Schritt «Lösung konstruieren» anzupacken und es damit bewenden zu lassen. Sie lösen dann vielleicht das falsche Problem, übersehen einfachere Lösungswege, produzieren eine offensichtlich unbrauchbare Lösung und verpassen, aus der geleisteten Arbeit (Lern-) Profit zu schlagen.*

1. Problem beschreiben

Hier verschafft man sich mit eigenen Worten und Bildern Klarheit über die Problemstellung. Dazu gehören insbesondere die folgenden Punkte:

- Skizze!!! (bei Ingenieurproblemen immer der erste Schritt)
- Situation (gegebene Grössen, Eigenschaften, ...)
- Ziele (gesuchte Grössen, gewünschte Genauigkeit, ...)
- Randbedingungen (Zeit, Kosten, ...)

2. Problem analysieren

Nun geht es darum, die Grundlagen für eine optimale Lösung zusammenzustellen. Die folgenden Fragen gehören dazu:

- Welches Wissen hilft zur Problemlösung? Muss ich ev. zuerst recherchieren?
- Hat mein System spezielle Eigenschaften (z.B. Symmetrien)?
- Welche Vereinfachungen sind möglich, welche zulässig?
- Welche Modellbildung ergibt sich daraus?
- Wie kann ich das Modell mathematisch beschreiben?

3. Lösung konstruieren

Die Lösung sollte in eine Sequenz von Unterproblemen aufgeteilt werden (*divide et impera*). Jedes Unterproblem kann in folgenden Schritten angegangen werden:

1. Hindernisse des Unterproblems identifizieren.
2. Optionen abwägen, beste Option wählen.
3. Unterproblem zu lösen versuchen.
4. eventuell zurückgehen und Optionen neu bewerten.

Falls das Ziel nicht erreicht werden konnte, müssen eventuell die Unterprobleme neu abgegrenzt werden. Oder es muss zusätzliches Wissen erworben werden.

4. Lösung bewerten

Eine falsche Lösung eines Ingenieurproblems ist unbrauchbar, auch wenn ev. nur ein Vorzeichen falsch ist!!! Es können Raketen und Flugzeuge abstürzen, Häuser und Brücken kollabieren. Bei falschen Modellbildungen können Finanzmärkte und Realwirtschaften kollabieren. Und sie tun es auch!

Deshalb muss die konstruierte Lösung unbedingt genau unter die Lupe genommen werden. Das ist auch bei Klausuren und Prüfungen sehr empfehlenswert. Die folgenden Fragen helfen dabei:

- Sind die zu Beginn identifizierten Ziele erreicht?
(Vielleicht ist die vermeintliche Lösung gar nicht die gesuchte...)
- Sind die Resultate klar und übersichtlich dargestellt?
(Ihre Mitarbeiterin, Ihr Bürokollege, Ihre Vorgesetzte, Ihr Dozent etc. soll die Resultate brauchen und verifizieren können!)
- Sind die Resultate intern befriedigend?
Sind also z.B. die Einheiten korrekt, die Bezeichnungen so wie in der Skizze etc.?
- Sind die Resultate extern konsistent?
(Stimmen die Grössenordnungen? Sind ev. Spezialfälle richtig? Gibt es alternative Lösungen, mit denen verglichen werden kann? Ist die funktionale Abhängigkeit von den Parametern glaubwürdig?)
- Sind die Resultate optimal?
(Sind Vereinfachungen möglich? Sind Verfeinerungen nötig? Gibt es bessere Lösungswege?)

Bei Problemen der Forschung und Entwicklung ist es die Regel und nicht die Ausnahme, dass die Bewertung der Lösung dazu zwingt, den Prozess zu revidieren und nochmals mit der Beschreibung und/oder Analyse des Problems zu starten. Deshalb brauchen Projekte und Disser-

tationen ihre Zeit. Nur Übungs- und Prüfungsaufgaben sind meist in verdaubare Häppchen eingeteilt.

5. Arbeit verwerten

Es wäre schade, nach so viel Aufwand die Früchte der Arbeit nicht vollständig zu ernten. Das gilt nicht nur im Studium, sondern auch im lebenslangen Lernprozess. Um das beim Problemlösen neu erworbene Wissen mit dem bisherigen zu verknüpfen, sollte man die folgenden Fragen bearbeiten:

- Was habe ich gelernt?
- Wie passt das zum bisherigen Wissen?
- Wo/wie sollte ich auf Grund dieser Erfahrung mein Wissen erweitern?

Appendix E: Resultate der Aufgaben

An diesem Anhang haben sich wahrscheinlich einige Fehler eingeschlichen. Bitte melden Sie sie an <mailto:kaufmann@ethz.ch>.

Abschnitt 1.1

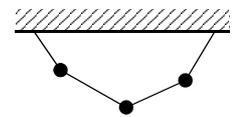
Aufgabe 1

$$\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_\rho.$$

Aufgabe 2

Ebenes System: Freiheitsgrad $f = 3 \cdot 2 - 4 = 2$.

Räumliches System: Freiheitsgrad $f = 3 \cdot 3 - 4 = 5$.



Aufgabe 3

Mit Formel (1.6) wird $\mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{e}_\rho + R\omega \mathbf{e}_\varphi + b\mathbf{e}_z = R\omega \mathbf{e}_\varphi + b\mathbf{e}_z$; daraus oder mit (1.7): $v = \sqrt{(R\omega)^2 + b^2}$.

Aufgabe 4

Bei drei Punkten ergibt die Formel (1.1): $f = n - b = 3 \cdot 3 - 3 = 6$.

Mit jedem weiteren Punkt wird n um 3 erhöht und es kommen genau 3 linear unabhängige Gleichungen bei b dazu. Alle weiteren Abstände zwischen den Punkten sind automatisch festgelegt. Deshalb erhöht sich der Freiheitsgrad nicht weiter.

Fritz rechnet bei 5 Punkten eine linear abhängige Bindungsgleichung zu viel. Auch Susi zählt alle Abstände zwischen den 6 Punkten mit und hat 3 linear abhängige Bindungsgleichungen zu viel in ihrer Rechnung.

Bei 2 Punkten ist eine mögliche Rotation um die Achse durch die beiden Punkte noch nicht beschrieben.

Abschnitt 1.3

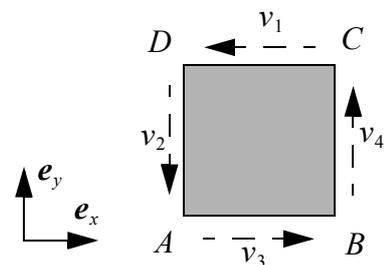
Aufgabe 1

Punkt A: $\mathbf{v}_A = v_3 \mathbf{e}_x - v_2 \mathbf{e}_y$.

Punkt B: $\mathbf{v}_B = v_3 \mathbf{e}_x + v_4 \mathbf{e}_y$.

Punkt C: $\mathbf{v}_C = -v_1 \mathbf{e}_x + v_4 \mathbf{e}_y$.

Punkt D: $\mathbf{v}_D = -v_1 \mathbf{e}_x - v_2 \mathbf{e}_y$.



SdpG für AC: $\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{AC} = \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{AC}$, also $v_3 - v_2 = v_4 - v_1$ oder $v_1 + v_3 = v_2 + v_4$.

(SdpG für BD liefert nichts Neues: $\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{BD} = \mathbf{v}_D \cdot \mathbf{BD}$, also $-v_3 + v_4 = v_1 - v_2$.)

Translation: $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C$, also $v_3 = -v_1$ und $v_4 = -v_2$.

Aufgabe 2

Lösungsskizze (nur mit SvM, SdpG):

Momentanzentrum AG in A , daraus die Richtung von $\mathbf{v}_D, \mathbf{v}_G$.

Mit v in C : Momentanzentrum M_{CG} von CG .

$$\text{Daraus } \mathbf{v}_E = \begin{pmatrix} 3v/4 \\ -v/4 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } \mathbf{v}_G = \begin{pmatrix} v/2 \\ -v/2 \end{pmatrix}, \text{ also } \mathbf{v}_D = \begin{pmatrix} v/4 \\ -v/4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ansatz } \mathbf{v}_B = \begin{pmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \end{pmatrix}.$$

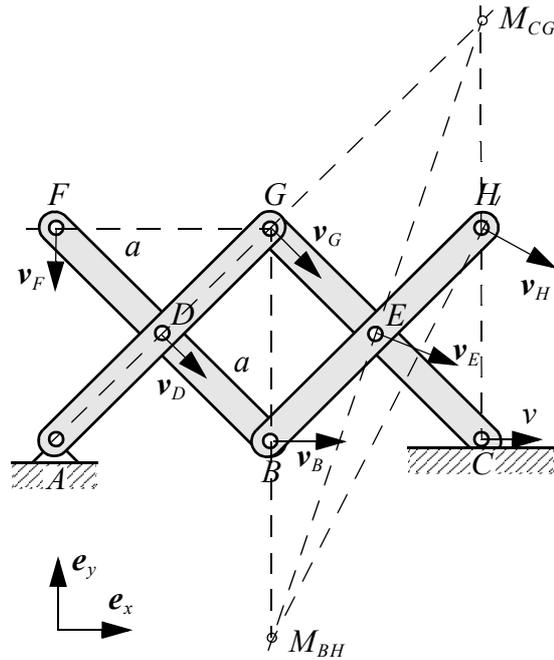
$$\text{SdpG für } DB: (v_{Bx} - v_{By})/\sqrt{2} = v/(2\sqrt{2}),$$

$$\text{SdpG für } BE: (v_{Bx} + v_{By})/\sqrt{2} = v/(2\sqrt{2}).$$

$$\text{Also: } \mathbf{v}_B = \begin{pmatrix} v/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus das Momentanzentrum M_{BH} von BH und das Momentanzentrum G von BF .

$$\text{Resultat: } \mathbf{v}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ -v/2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_H = \begin{pmatrix} v \\ -v/2 \end{pmatrix}.$$



Abschnitt 1.4

Aufgabe 1

Siehe Beweis von (1.14) auf Seite 17.

Aufgabe 2

Formel (1.14), $\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P$, ergibt mit $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_z, \mathbf{r}_P = \mathbf{e}_\rho, \mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{e}}_\rho$:

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\varphi} \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \text{ etc.}$$

Aufgabe 3

Starrkörperformel (1.16) für AB und AD ergibt:

$$\omega_x = (v_D - v_A)/a, \omega_y = (v_A - v_B)/a, \omega_z = 0.$$

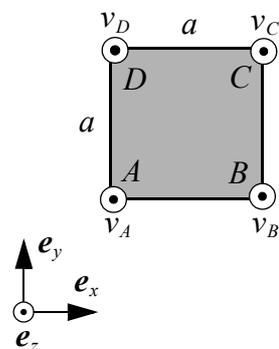
Starrkörperformel (1.16) mit diesem $\boldsymbol{\omega}$ für AC ergibt dann:

$$v_A + v_C = v_D + v_B.$$

- Für eine Translation muss $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ sein, also

$$v_A = v_B = v_C = v_D.$$

- Ansonsten ist $\mathbf{v}_A \perp \boldsymbol{\omega}$, also $I_2 = \mathbf{v}_A \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$, also liegt also eine reine Rotation vor.

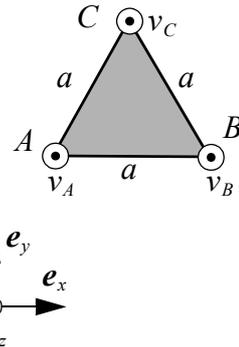


Bemerkung: Eine Überlegung nur mit dem SdpG in der Ebene reicht nicht. Man müsste auch einen Punkt ausserhalb der Ebene betrachten, um die Starrkörperbewegung nachzuweisen.

Aufgabe 4

Starrkörperformel (1.16) für AB und AC ergibt die Kinematik in A :

$$\mathbf{v}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_A \end{pmatrix}, \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}(2v_C - v_A - v_B) \\ v_A - v_B \\ 0 \end{pmatrix}.$$

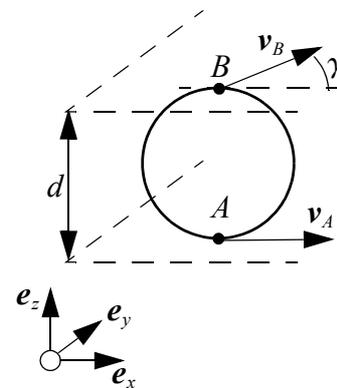


- Falls $v_A = v_B = v_C$ ist, so wird $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, also *Translation*.
- Ansonsten ist immer $I_2 = \mathbf{v}_A \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$, also *Rotation*.

Aufgabe 5

Es ist

$$\mathbf{v}_A = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_B = \begin{pmatrix} v \cos \gamma \\ v \sin \gamma \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Mit Starrkörperformel (1.16) wird

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{v}{d} \begin{pmatrix} \sin \gamma \\ 1 - \cos \gamma \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Annahme: $0 \leq \gamma < 2\pi$. Dann gilt

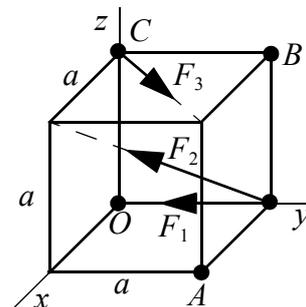
- $\gamma = 0$: Translation,
- $\gamma = \pi$: Rotation,
- sonst: Schraubung.

Abschnitt 1.5

Aufgabe 1

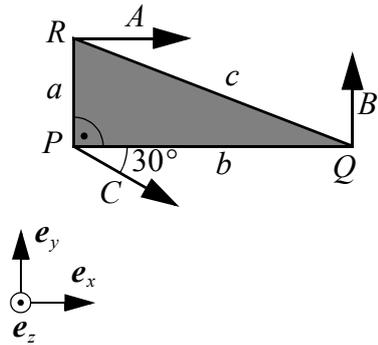
$$\mathbf{M}_O(F_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{M}_O(F_2) = \frac{aF_2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{M}_O(F_3) = \frac{aF_3}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{M}_A(F_1) = aF_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{M}_B(F_1) = aF_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{M}_C(F_1) = \mathbf{M}_B(F_1).$$



Aufgabe 2

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_R(A) &= \mathbf{0}, \mathbf{M}_P(A) = -aA\mathbf{e}_z, \mathbf{M}_Q(A) = \mathbf{M}_P(A); \\ \mathbf{M}_O(B) &= \mathbf{0}, \mathbf{M}_R(B) = bB\mathbf{e}_z, \mathbf{M}_P(B) = \mathbf{M}_R(B); \\ \mathbf{M}_P(C) &= \mathbf{0}, \mathbf{M}_Q(C) = \frac{b}{2}C\mathbf{e}_z, \mathbf{M}_R(C) = \frac{\sqrt{3}a}{2}C\mathbf{e}_z. \end{aligned}$$



Abschnitt 1.6

Aufgabe 1

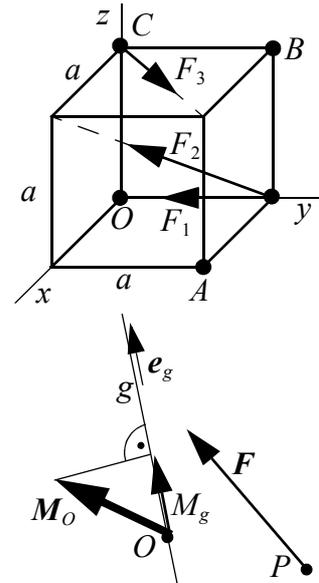
$$\mathcal{P}_T = v \left(\frac{F_2}{\sqrt{3}} + \frac{F_3}{\sqrt{2}} \right), \mathcal{P}_R = -\frac{a\omega F_2}{\sqrt{3}}.$$

Aufgabe 2

Tipp: Überlegung mit (1.28), $\mathcal{P} = \mathbf{M}_O \cdot \boldsymbol{\omega}$, O auf der Rotationsachse.

Aufgabe 3

Tipp: Definition (1.23), $M_g = \mathbf{e}_g \cdot \mathbf{M}_O$. Wann ist $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ oder $\mathbf{M}_O \perp \mathbf{e}_g$?



Abschnitt 2.1

Aufgabe 1

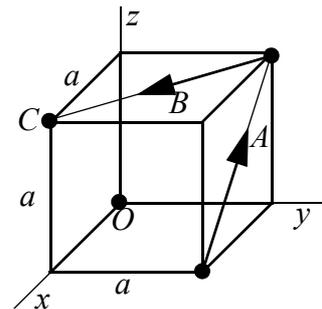
Mögliche *Beweiselemente*: Zuerst resultierendes Moment betrachten (Bezugspunkt frei wählbar). Falls Bezugspunkt auf Wirkungslinie einer Kraft, so muss noch die Summe der Momente der anderen zwei Kräfte verschwinden. Falls deren Wirkungslinien durch den Punkt gehen, sind wir fertig. Ansonsten müssen sie parallel sein, damit sich ihre Momente zu null addieren können. Also sind diese zwei Kräfte parallel. Damit die Resultierende verschwinden kann, muss auch die dritte Kraft parallel sein.

Aufgabe 2

$$\{\mathbf{R}, \mathbf{M}_O\} \text{ mit } \mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -A+B \\ -B \\ A \end{pmatrix}, \mathbf{M}_O = \frac{a}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} A+B \\ -A+B \\ A-B \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

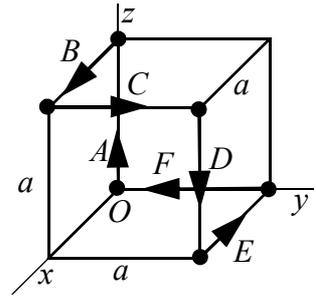
$$\{\mathbf{R}, \mathbf{M}_C\} \text{ mit } \mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -A+B \\ -B \\ A \end{pmatrix}, \mathbf{M}_C = \frac{a}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} A \\ A \\ A \end{pmatrix}.$$



Aufgabe 4

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{M}{2a} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{M}{2a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{M}{2a} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M}{2a} \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} -\frac{M}{2a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{M}{2a} \\ 0 \end{pmatrix},$$

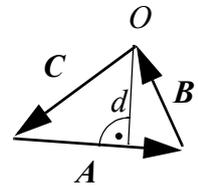


oder

$$A = -\frac{M}{2a}, B = \frac{M}{2a}, C = \frac{M}{2a}, D = -\frac{M}{2a}, E = \frac{M}{2a}, F = \frac{M}{2a}.$$

Aufgabe 5

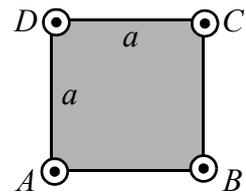
$$R = A + B + C = \mathbf{0}, M_O = \pm d|A| \text{ (doppelte Fläche).}$$



Abschnitt 2.2

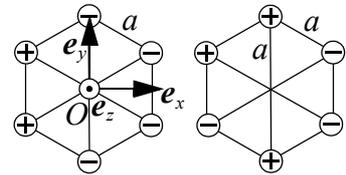
Aufgabe 1

$$A = C, B = D.$$



Aufgabe 2

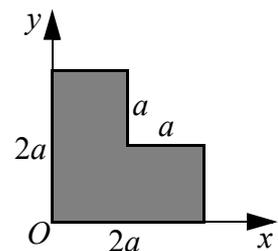
$$r_c = \begin{pmatrix} \sqrt{3}a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}qa \\ qa \\ 0 \end{pmatrix}.$$



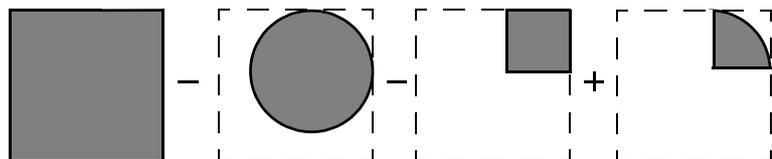
Aufgabe 3

a)

$$x_c = y_c = \frac{5a}{6}.$$

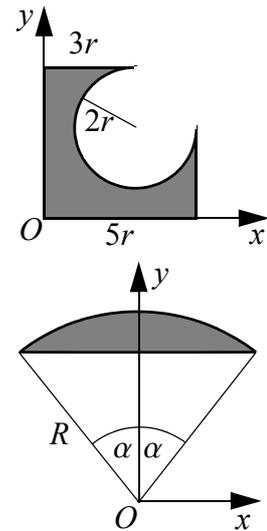


b) Der Gesamtschwerpunkt kann aus der Addition/Subtraktion der rechts angedeuteten Flächen bestimmt werden.



So ergibt sich:

$$x_c = y_c = \frac{295 - 54\pi}{126 - 18\pi}$$



Aufgabe 4

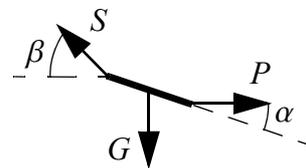
Das Kreissegment kann aus dem Kreissektor (Schwerpunktsberechnung durch Integration) durch Subtraktion des gleichschenkligen Dreiecks (Schwerpunkt auf 2/3 der Höhe) konstruiert werden.

$$x_c = 0, y_c = \frac{2R}{3} \cdot \frac{(\sin \alpha)^3}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$$

Abschnitt 2.4

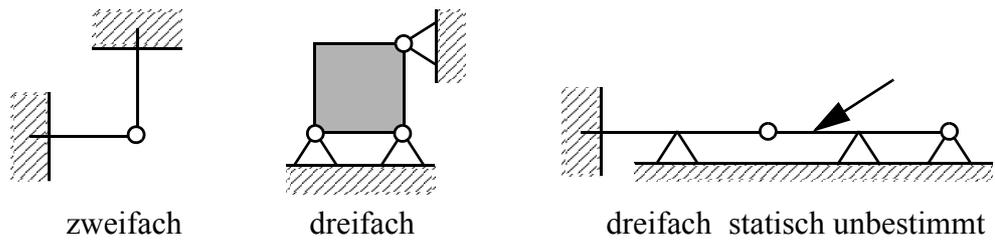
Aufgabe 1

$$\alpha = \arctan \frac{G}{2P}, \beta = \arctan \frac{G}{P}, S = \sqrt{P^2 + G^2}$$



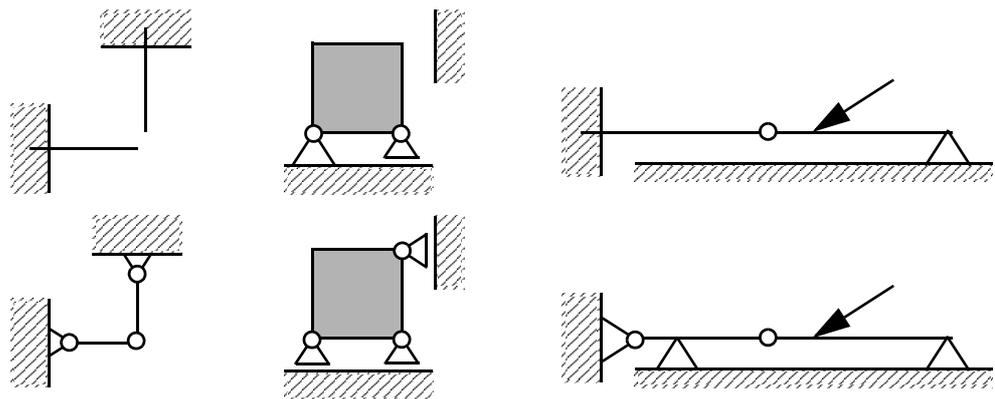
Abschnitt 2.5

Aufgabe 1



Aufgabe 2

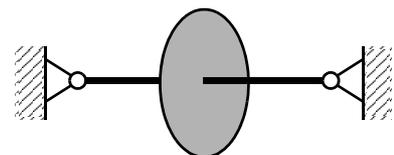
Varianten:



Aufgabe 3

Rotation um Achse möglich, also einfach kinematisch unbestimmt (oder: Momentenbed. um Achse nicht erfüllbar).

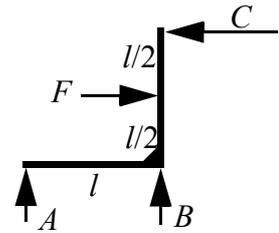
Sechs unbekannte Lagerkraftkomponenten, aber nur fünf Gleichgewichtsbedingungen nutzbar (s.o.), also einfach statisch unbestimmt (oder: klemmt in Achsenrichtung).



Es lohnt sich, für eine angenommene Last die Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen.

Aufgabe 4

$$A = \frac{F}{2}, B = -\frac{F}{2}, C = F.$$

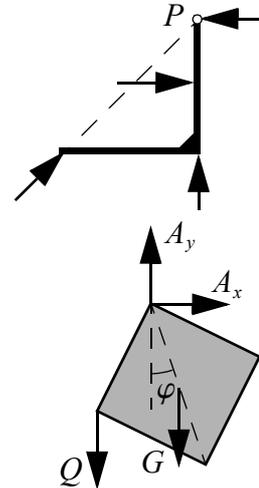


Eine Momentenbedingung bezüglich P ist nicht erfüllbar, weil das System kinematisch unbestimmt ist.

Abschnitt 2.6

Aufgabe 1

$$A_x = 0, A_y = G + Q, \varphi = \arctan\left(\frac{Q}{G+Q}\right).$$

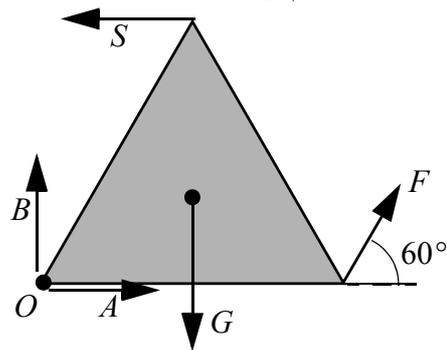


Aufgabe 2

Resultate wie *Beispiel: Dreieckplatte* auf Seite 51:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{3}G - F, A = \frac{\sqrt{3}}{3}G - \frac{3}{2}F, B = G - \frac{\sqrt{3}}{2}F.$$

Gelenkkräfte parallel und senkrecht zum Faden einführen.

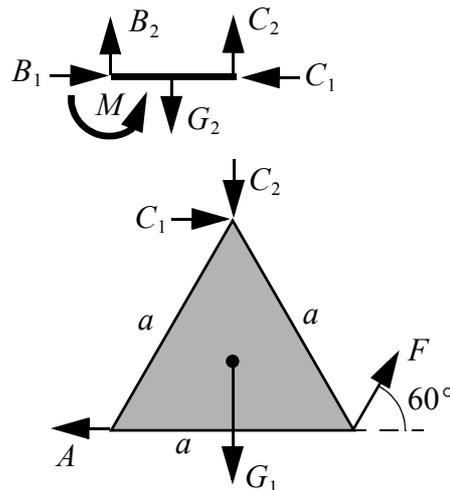


Aufgabe 3

Mit einem Festlager unten wäre das System statisch unbestimmt.

$$A = F, B_1 = C_1 = \frac{F}{2}, B_2 = G_1 + G_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}F,$$

$$C_2 = -G_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}F, M = \frac{a}{4}(2G_1 + G_2 - \sqrt{3}F).$$



Abschnitt 2.7

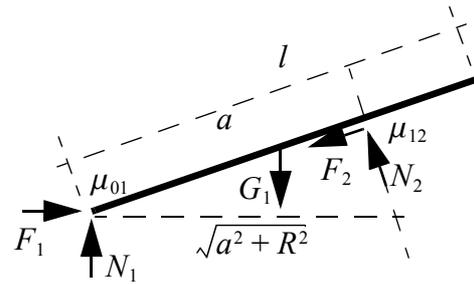
Aufgabe 1

$$N_1 = \frac{G_1 l}{2} \cdot \frac{\mu_{12} R - a}{a^2 + R^2} + G_1, F_1 = \frac{G_1 l}{2} \cdot \frac{\mu_{12} a + R}{a^2 + R^2},$$

$$N_2 = \frac{G_1 l}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + R^2}}, F_2 = \frac{G_1 l}{2} \cdot \frac{\mu_{12}}{\sqrt{a^2 + R^2}}.$$

Es ist $F_1 > 0$ und $N_1 > 0$, also reduziert sich die Haftbedingung auf $F_1 < \mu_{01} N_1$. Das bedeutet:

$$a_1 \leq a \leq a_2 \text{ mit } a_{1,2} = \frac{l(\mu_{01} + \mu_{12}) \mp \sqrt{l^2(\mu_{01} + \mu_{12})^2 - 8\mu_{01}(2\mu_{01}R^2 + \mu_{01}\mu_{12}Rl - Rl)}}{4\mu_{01}}.$$



Aufgabe 2

Momentenbedingung für Scheibe ergibt: $F_2 = 0$. Daraus:

$$N_1 = -\frac{G_1 l}{2} \cdot \frac{a}{a^2 + R^2} + G_1, F_1 = \frac{G_1 l}{2} \cdot \frac{R}{a^2 + R^2}, N_2 = \frac{G_1 l}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + R^2}}.$$

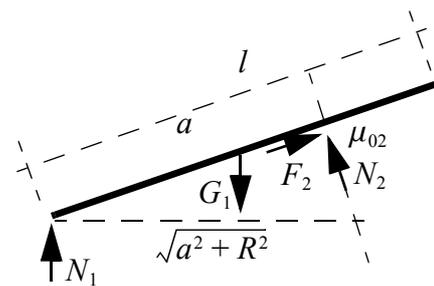
$$a_1 \leq a \leq a_2 \text{ mit } a_{1,2} = \frac{l\mu_{01} \mp \sqrt{l^2\mu_{01}^2 - 8\mu_{01}(2\mu_{01}R^2 - Rl)}}{4\mu_{01}}.$$

Aufgabe 3

$$N_1 = G_1 \left(1 - \frac{l}{2a}\right), F_2 = \frac{G_1 l}{2a} \cdot \frac{R}{\sqrt{a^2 + R^2}},$$

$$N_2 = \frac{G_1 l}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + R^2}}, C_1 = 0, C_2 = G_2 + \frac{G_1 l}{2a},$$

$$M = \frac{G_1 l}{2a} \cdot \frac{R^2}{\sqrt{a^2 + R^2}}.$$

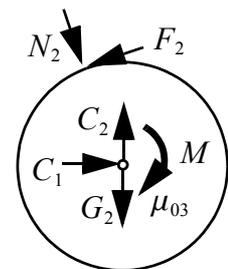


Haften im Auflager:

$$\mu_{02} \geq \frac{R}{a}.$$

Gelenkreibungsgesetz:

$$\mu_{03} r_l \geq \frac{G_1 l}{2G_2 a + G_1 l} \cdot \frac{R^2}{\sqrt{a^2 + R^2}}.$$



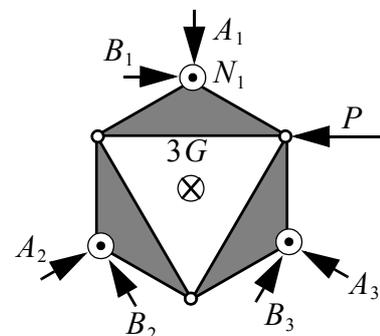
Aufgabe 4

Schneller Weg: 6 Gleichgewichtsbedingungen für Gesamtsystem (Momentenbedingungen bez. geschickt gewählter Achsen!) und drei Momentenbedingungen für die einzelnen Dreieckplatten bez. der Achsen durch die Gelenke.

Geometrie: Die Ebene mit den Gelenken und P liegt $\sqrt{2}l/\sqrt{3}$ über der Auflageebene.

$$N_1 = G, A_1 = \frac{\sqrt{2}}{6}G, B_1 = \frac{P}{2},$$

$$N_2 = G + \frac{\sqrt{6}}{3}P, A_2 = \frac{\sqrt{2}}{6}G + \frac{\sqrt{3}}{6}P, B_2 = 0, N_3 = G - \frac{\sqrt{6}}{3}P, A_3 = \frac{\sqrt{2}}{6}G - \frac{\sqrt{3}}{6}P, B_3 = 0.$$



Kein Kippen: $|P| \leq \frac{\sqrt{6}}{2} G$.

Kein Gleiten: $|P| \leq \frac{G}{3} \sqrt{36\mu_0^2 - 2}$ (erfüllt) und $|P| \leq \frac{6\mu_0 + \sqrt{2}}{2\sqrt{6}\mu_0 + \sqrt{3}} G$.

Bemerkung 1: Für $P > 0$ ist die Haftbedingung mit A_2, N_2 automatisch erfüllt, kritisch ist $|A_3| \leq \mu_0 N_3$.

Bemerkung 2: Mit $\frac{\sqrt{2}}{4} < \mu_0 < \infty$ gilt $\frac{6\mu_0 + \sqrt{2}}{2\sqrt{6}\mu_0 + \sqrt{3}} < \frac{\sqrt{6}}{2}$. Deshalb ist die Haftbedingung entscheidend.

Abschnitt 3.1

Aufgabe 1

$$|a| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = g, z_{max} = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g}, x_{max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Abschnitt 3.3

Aufgabe 1

Wir müssen beachten, dass die Richtung der Gleitreibungskraft immer entgegengesetzt zu \dot{x} ist.

a) $v_0 > 0$: Zu Beginn ist

$$\dot{x}(t) = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)t + v_0.$$

Für $\mu < \tan \alpha$ nimmt die Geschwindigkeit unbegrenzt linear zu.

Für $\mu > \tan \alpha$ nimmt die Geschwindigkeit ab und hat bei

$$t_1 = v_0 / (g(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)) > 0$$

eine Nullstelle. Der Quader bleibt ab dieser Zeit liegen.

b) $v_0 < 0$: Die Richtung der Reibungskraft zeigt zu Beginn in positiver x-Richtung. Es ist

$$\dot{x}(t) = g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)t + v_0.$$

Für

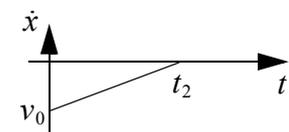
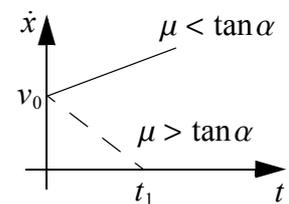
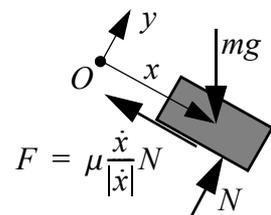
$$t_2 = -v_0 / (g(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)) > 0$$

hat die Geschwindigkeit eine Nullstelle.

Anschliessend muss unterschieden werden:

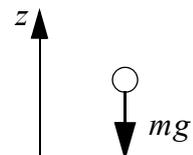
Für $\mu < \tan \alpha$ wird der Quader analog zu *Beispiel: Quader auf rauher, schiefer Ebene* auf Seite 82 nach unten rutschen.

Für $\mu > \tan \alpha$ wird der Quader liegen bleiben.



Aufgabe 2

$$\ddot{z} = -g, z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t.$$

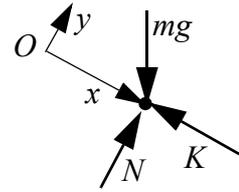


Aufgabe 3

Koordinatenursprung O bei ungespannter Feder.

$$K = cx, N = mg \cos \alpha, m\ddot{x} = mg \sin \alpha - cx;$$

$$x(t) = -\frac{mg \sin \alpha}{c} \cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t\right) + \frac{mg \sin \alpha}{c}.$$



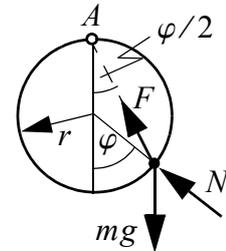
Bemerkung: Koordinatenursprung in der Ruhelage ergäbe keine Inhomogenität.

Aufgabe 4

Newtonsches Gesetz in Polarkoordinaten, tangentielle Richtung:

$$mr\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi + c\left(2r \cos \frac{\varphi}{2}\right) \sin \frac{\varphi}{2} = (cr - mg) \sin \varphi,$$

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{r} - \frac{c}{m}\right) \sin \varphi = 0. \text{ Ruhelagen: } \varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi.$$



a) Linearisierung um $\varphi_1 = 0$ ergibt $\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{r} - \frac{c}{m}\right)\varphi = 0$. Für $mg > cr$ ist eine kleine Schwingung mit Kreisfrequenz $\sqrt{\frac{g}{r} - \frac{c}{m}}$ möglich.

b) Linearisierung um $\varphi_2 = \pi$ ergibt $\ddot{\varphi} - \left(\frac{g}{r} - \frac{c}{m}\right)\varphi = 0$. Für $mg < cr$ ist eine kleine Schwingung mit Kreisfrequenz $\sqrt{\frac{c}{m} - \frac{g}{r}}$ möglich.

Aufgabe 5

Es ist $z(t) = \left(v_0 + \frac{g}{k}\right) \frac{(1 - e^{-kt})}{k} - \frac{g}{k}t$ mit $k = \frac{\lambda}{m}$. Die maximale Höhe wird bei $t_{max} = \frac{1}{k} \log\left(1 + \frac{kv_0}{g}\right)$ erreicht

und beträgt $z_{max} = h = \frac{1}{k^2} \left(kv_0 - g \log\left(1 + \frac{kv_0}{g}\right)\right)$. Substitution von $\epsilon = \frac{\lambda v_0}{mg}$ ergibt

$$h(\epsilon) = \frac{v_0^2 \epsilon - \log(1 + \epsilon)}{g \epsilon^2} = 2h_0 \frac{\epsilon - \log(1 + \epsilon)}{\epsilon^2}.$$

Taylorentwicklung von $\log(1 + \epsilon)$ um $\epsilon = 0$: $\log(1 + \epsilon) = \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^3}{3} + O(\epsilon^4)$. Also:

$$h(\epsilon) = h_0 \left(1 - \frac{2}{3}\epsilon + O(\epsilon^2)\right).$$

Aufgabe 6

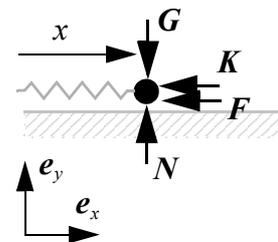
Kräfte: $G = -mge_y, N = Ne_y = mge_y, K = -cx e_x$ (Feder),

$F = -\mu mg \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} e_x$ (Gleitreibung) bzw. unbekanntes F , falls der Massenpunkt stillsteht.

Bewegungsgleichung: $m\ddot{x} = -cx - \mu mg \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$, also mit $\omega^2 = \frac{c}{m}$:

a) $\ddot{x} + \omega^2 x = -\mu g$ für $\dot{x} \geq 0$, mit allgemeiner Lösung $x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t - \mu g / \omega^2$,

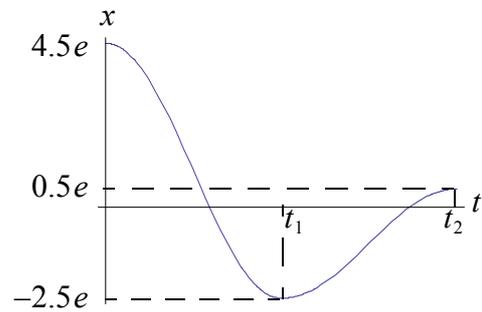
b) $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu g$ für $\dot{x} < 0$, mit allgemeiner Lösung $x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \mu g / \omega^2$.



1. *Anfang, $t = 0$* : Zuerst muss die Haftbedingung untersucht werden. $\mathbf{K}(0) = -cx(0)\mathbf{e}_x = -4.5ce\mathbf{e}_x$, mit $e = \mu mg/c = \mu g/\omega^2$, also $|\mathbf{K}(0)| = 4.5\mu mg > \mu mg = \mu|\mathbf{N}|$, also ist die Haftbedingung verletzt. Also setzt eine Bewegung mit $\dot{x} < 0$ (in Richtung der resultierenden Kraft) ein.
2. *Erste Bewegungsphase*: Anfangsbedingung $x(0) = 4.5e$, $\dot{x}(0) = 0$ (also $c_2 = 0$) und Gleichung/Lösung a):

$$x(t) = 3.5e \cos \omega t + e$$
 Stillstand bei $t_1 = \frac{\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{c}}\pi$,

$$x(t_1) = -2.5e$$
3. *Diskussion des Haftens bei $t = t_1$* :
 $|\mathbf{K}(t_1)| = 2.5\mu mg > \mu mg = \mu|\mathbf{N}|$, also ist die Haftbedingung verletzt. Also folgt eine Bewegung in Richtung der resultierenden Kraft mit $\dot{x} \geq 0$.
4. *Zweite Bewegungsphase*: Anfangsbedingung $x(t_1) = -2.5e$, $\dot{x}(t_1) = 0$ (also $c_2 = 0$) und Gleichung/Lösung b): $x(t) = 1.5e \cos \omega t - e$. Stillstand bei $t_2 = 2\sqrt{\frac{m}{c}}\pi$, $x(t_2) = 0.5e$.
5. *Diskussion des Haftens bei $t = t_2$* : $|\mathbf{K}(t_2)| = 0.5\mu mg < \mu mg = \mu|\mathbf{N}|$, also ist die Haftbedingung erfüllt. Also bleibt der Massenpunkt liegen.



Abschnitt 3.4

Aufgabe 1

Freiheitsgrad: $f = 1$.

Kinematische Relation: $R\dot{\varphi} = \dot{x}$.

Massenmittelpunktsatz: $m\ddot{x} = mg - S$.

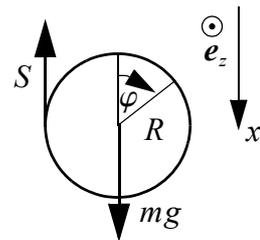
Relativer Drallsatz: Ortsvektoren und Geschwindigkeiten der Scheibenpunkte liegen in der gezeichneten Vertikalebene, also sind alle Kreuzprodukte $\mathbf{r}' \times \mathbf{v}'$ senkrecht dazu, in Richtung \mathbf{e}_z : $L_C = L_C \mathbf{e}_z$.

$$L_C = \int_{\text{Rad}} \int_{\text{Rad}} \mathbf{r}' \mathbf{v}' dm = \dot{\varphi} \int_{\text{Rad}} \int_{\text{Rad}} r'^2 dm \quad (\text{siehe auch Abschnitt 3.5}). \text{ Also:}$$

$$\dot{L}_C = \ddot{\varphi} \int_{\text{Rad}} \int_{\text{Rad}} r'^2 dm = RS.$$

Man braucht den Drallsatz, um zwei Gleichungen für die zwei Unbekannten (Seilkraft und Bewegung) zu erhalten.

Die weitere Lösung ist in Aufgabe 2, Seite 153 diskutiert.



Abschnitt 3.5

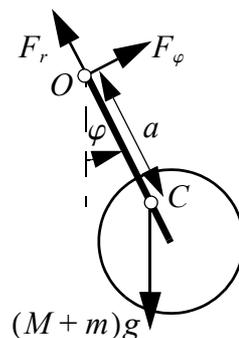
Aufgabe 1

Freiheitsgrad: $f = 1$.

Bestimmung des *Massenmittelpunkts*:

$$(M + m)a = \frac{ml}{2} + Ml, \text{ also } a = \frac{ml + 2Ml}{2(M + m)}.$$

Bestimmung des *Massenträgheitsmoments* mit dem Satz von Steiner (falls nicht aus der Analysis bekannt, siehe Abschnitt C.2, Seite 135):



$$I_O = I_{O\text{Stab}} + I_{C\text{Scheibe}} + Ml^2, \text{ also } I_O = \frac{ml^2}{3} + \frac{MR^2}{2} + Ml^2.$$

Massenmittelpunktsatz tangential: $(M+m)a\ddot{\varphi} = F_\varphi - (M+m)g\sin\varphi.$

Massenmittelpunktsatz radial nach innen: $(M+m)a\dot{\varphi}^2 = F_r - (M+m)g\cos\varphi.$

Drallsatz bez. O: $\dot{L}_O = I_O\ddot{\varphi} = -(M+m)ga\sin\varphi.$

Linearisierung für $\varphi \ll 1$: $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$ mit $\omega_0^2 = \frac{(M+m)ga}{I_O} = \frac{3gl(2M+m)}{2l^2(3M+m) + 3MR^2}.$

Lösung mit $\varphi(0) = \varphi_0 \ll 1$, $\dot{\varphi}(0) = 0$: $\varphi(t) = \varphi_0 \cos\omega_0 t.$

Lagerkraftkomponenten:

$$F_r = (M+m)(a\dot{\varphi}^2 + g\cos(\varphi_0 \cos\omega_0 t)) = (M+m)(g\cos(\varphi_0 \cos\omega_0 t) + a\varphi_0^2\omega_0^2(\sin\omega_0 t)^2),$$

$$F_\varphi = (M+m)(a\ddot{\varphi} + g\sin(\varphi_0 \cos\omega_0 t)) = (M+m)(g\sin(\varphi_0 \cos\omega_0 t) - a\varphi_0\omega_0^2\cos\omega_0 t).$$

Bemerkung: Wegen der Linearisierung machen eigentlich nur die entsprechend linearisierten Lagerkraftkomponenten Sinn:

$$F_r \approx g(M+m), F_\varphi \approx (M+m)(g - a\omega_0^2)\varphi_0 \cos\omega_0 t.$$

Aufgabe 2

Freiheitsgrad: $f = 1.$

Kinematische Relation: $R\dot{\varphi} = \dot{x}.$

Massenmittelpunktsatz: $m\ddot{x} = mg - S.$

Relativer Drallsatz mit Massenträgheitsmoment: $\dot{L}_C = I_C\ddot{\varphi} = \frac{mR^2}{2}\ddot{\varphi} = RS.$

(Alternative: Drall bez. O mit (3.41): $L_O = mR\dot{x} + L_C$ und

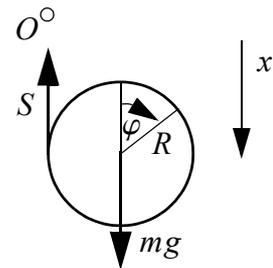
Drallsatz bez. O: $\dot{L}_O = mgR = mR\ddot{x} + \dot{L}_C = mgR - RS + \dot{L}_C = mgR - RS + RS$: liefert nichts Neues.)

Es ergibt sich z.B. $\ddot{\varphi} = \frac{mgR}{I_C + mR^2}$ und mit $I_C = \frac{mR^2}{2}$ schlussendlich: $\ddot{\varphi} = \frac{2g}{3R}$

Lösung mit $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$: $\varphi(t) = \frac{g}{3R}t^2$ oder (bei geeigneter Wahl der x-Koordinate) $x(t) = \frac{g}{3}t^2.$

Fadenkraft: $S(t) = \frac{mg}{3}$

Lösung für freien Fall: $x(t) = \frac{g}{2}t^2.$ Die Rotationsträgheit der Scheibe verlangsamt die Bewegung.



Aufgabe 3

Freiheitsgrad: $f = 1$.

Kinematische Relation: $R\dot{\varphi} = \dot{x}$.

Wir stellen nur die für die Bestimmung der Bewegung nötigen Gleichungen auf:

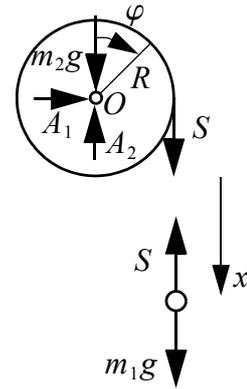
Massenmittelpunktsatz für Körper: $m_1\ddot{x} = m_1g - S$.

Drallsatz für Scheibe: $\dot{L}_O = I_O\ddot{\varphi} = \frac{m_2R^2}{2}\ddot{\varphi} = RS$

Mit der kinematischen Relation vereinfachen sich die Gleichungen zu:

$$\left(m_1 + \frac{I_O}{R^2}\right)\ddot{x} = \left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)\ddot{x} = m_1g.$$

Mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ wird die Lösung: $x(t) = \frac{m_1g}{2m_1 + m_2}t^2$.



Aufgabe 4

Freiheitsgrad: $f = 1$.

Kinematische Relationen: $\dot{x}_C = \frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi, \dot{y}_C = -\frac{l}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi$.

Massenmittelpunktsatz: $m\ddot{x}_C = N_1, m\ddot{y}_C = N_2 - mg$.

Drallsatz: $I_C\ddot{\varphi} = \frac{l}{2}(N_2\sin\varphi - N_1\cos\varphi)$ mit $I_C = \frac{ml^2}{12}$.

Das sind die gewünschten Gleichungen. Das Weiterrechnen ergibt:

$$\ddot{x}_C = \frac{l}{2}(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi), \ddot{y}_C = -\frac{l}{2}(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi),$$

$$N_1 = \frac{ml}{2}(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi), N_2 = mg - \frac{ml}{2}(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)$$

und damit

$$I_C\ddot{\varphi} = -\frac{ml^2}{4}\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{2}\sin\varphi,$$

bzw.

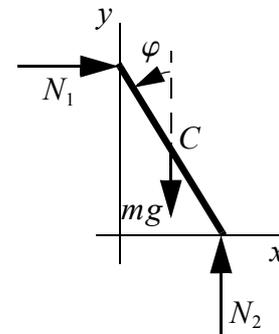
$$\ddot{\varphi} - \frac{mgl}{2\left(I_C + \frac{ml^2}{4}\right)}\sin\varphi = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist analog zum Pendel, wenn man den Winkel von der stehenden Lage aus rechnet (siehe z.B. *Beispiel: Physikalisches Pendel* auf Seite 95).

Der *Energiesatz* (siehe Seite 131) hätte das Resultat etwas rascher geliefert. Die Gesamtenergie

$$\mathcal{E} = \mathcal{T} + \mathcal{V} = \mathcal{T}_t + \mathcal{T}_r + \mathcal{V} = \frac{ml^2}{8}\dot{\varphi}^2 + \frac{I_C}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{mgl}{2}\cos\varphi$$

ist in diesem konservativen System konstant. Deren Ableitung nach der Zeit verschwindet also und ergibt die vom Drallsatz gelieferte Gleichung. Noch nicht bestimmt wären auf diesem Weg allerdings die Normalkräfte.



Literaturauswahl

Die beiden zuerst aufgeführten Bücher liegen in ihrer Terminologie und Methodik am nächsten bei dieser Vorlesung.

M. B. Sayir, J. Dual, S. Kaufmann, E. Mazza: *Ingenieurmechanik 1, Grundlagen und Statik*. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2015.

M. B. Sayir, S. Kaufmann: *Ingenieurmechanik 3, Dynamik*. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2014.

J. Berger: *Technische Mechanik für Ingenieure, Band 1: Statik*. Vieweg, Braunschweig, 1991.

J. Berger: *Technische Mechanik für Ingenieure, Band 3: Dynamik*. Vieweg, Braunschweig, 1998.

D. Gross, W. Hauger, J. Schröder, W. Wall: *Technische Mechanik, Band 1: Statik*. Springer, Berlin, 2011.

D. Gross, W. Hauger, W. Schnell, J. Schröder: *Technische Mechanik, Band 3: Kinetik*. Springer, Berlin, 2004.

D. Gross, W. Ehlers, P. Wriggers, J. Schröder, R. Müller: *Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik: 1 Statik*. Springer, Berlin, 2011.

D. Gross, W. Schnell, W. Ehlers, P. Wriggers: *Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik: 3 Kinetik, Hydrodynamik*. Springer, Berlin, 1999.

P. Hagedorn: *Aufgabensammlung technische Mechanik*. Teubner, Stuttgart, 1992.

P. Hagedorn, J. Wallaschek: *Technische Mechanik, Band 1: Statik*. Deutsch, Frankfurt am Main, 2014.

P. Hagedorn: *Technische Mechanik, Band 3: Dynamik*. Deutsch, Frankfurt am Main, 2008.

W. Hauger, V. Mannl, W. Wall, E. Werner: *Aufgaben zu Technische Mechanik 1-3*, Springer, Berlin, 2008.

R. C. Hibbeler: *Technische Mechanik 1, Statik*. Pearson, München, 2012.

R. C. Hibbeler: *Technische Mechanik 3, Dynamik*. Pearson, München, 2012.

G. Holzmann, H. Meyer, G. Schumpich: *Technische Mechanik, Teil 1: Statik*. Teubner, Stuttgart, 2000.

G. Holzmann, H. Meyer, G. Schumpich: *Technische Mechanik, Teil 2: Kinematik und Kinetik*. Teubner, Stuttgart, 2000.

F. Mestemacher: *Grundkurs technische Mechanik: Statik der Starrkörper, Elastostatik, Dynamik*. Spektrum, Heidelberg, 2008.

W. Müller, F. Ferber: *Technische Mechanik für Ingenieure*. Hanser, München, 2011.

Sachverzeichnis

A

Abstand Punkt-Gerade 115
 Achse
 –, Momentan- – 18
 –, Rotations- – 11
 –, Schrauben- – 39
 –, Zentral- – 39
 Achterbahn 124
 Addition von Vektoren 108
 Alembert 79
 Allgemeine Relativitätstheorie 83
 Amplitude 84
 analytische Statik 59
 Anfangsbedingung 81, 83
 Anfangswertproblem 81
 Angriffspunkt 23
 Angriffspunkt, unterschiedlicher 25
 Äquivalenzprinzip 83
 Äquivalenz, statische 34
 Auflager 54, 55, 64
 äussere Kraft 25
 äusseres Produkt 114

B

Bahnkurve 6
 Bahn, Pol- – 14
 Balken
 –, fallender 129
 Basis 110
 Bedingung
 –, Gleichgewichts- – 51
 –, Komponenten- – 51
 –, Momenten- – 51
 Bernoulli 48
 Berührung, ideal raue 69
 Beschleunigung 76
 –, in Polarkoordinaten 78
 –, in Zylinderkoordinaten 77
 bewegliche Polbahn 14
 Bewegung 6
 –, ebene 11, 12, 99, 128
 –, Geometrie 76
 –, kräftefreie 98
 –, starre 11
 –, unzulässige 54
 –, zulässige 54

Bewegungs

– -Differentialgleichung 81, 82
 – -Gleichung 81, 82
 – -Zustand
 –, momentaner 11
 –, virtueller 47
 –, unzulässiger 47
 –, zulässiger 47

Bezugs

– -Körper 5
 – -Punkt 26
 – -System 5

Bindung 53

–, einseitige 54
 –, reibungsfreie 54

Bindungskomponente 57

Bindungskraft 33, 53

Bremsen 71

C

Coulombsches

– Gesetz 23
 – Potential 121
 – Reibungsgesetz 68

D

d'Alembert 79

Deviationsmoment 133

Dichte 79

Dichte, Kraft- – 24

Differentialgleichung 82

–, Bewegungs- – 81, 82

Dimensionierung 33

Dipolmoment

–, einer Kräftegruppe 42
 –, einer Ladungsgruppe 43

Drall 94

–, bez. des Massenmittelpunktes 96

–, relativer 96

– -Satz 94

–, bez. des Massenmittelpunktes 97, 101

–, für ebene Rotationen 100

–, im bewegten System 137

–, relativer 97

Dreieckplatte 14, 51

Dynamik 38

–, Invarianten 38

Dynamik 76

E

ebene Bewegung 11, 12, 99, 128
 eingeprägte Kraft 54
 einseitige Bindung 54
 Einspannung 55
 Einstein 83
 elastischer Stoss 93
 Energie
 –, kinetische 118
 –, relative kinetische 128
 –-Satz 119
 –, für konservative Systeme 123
 –, Translations- – 128
 Eötvös 83
 Erhaltungssatz 92
 Euler-Gleichungen 137, 138

F

Fachwerk 59
 Faden 55
 fallender Balken 129
 Feder 122
 –-Gesetz 85, 122
 –-Konstante 85, 122
 –-Kraft 122
 –-Steifigkeit 85, 122
 Feld
 –, konservatives 122
 –, Kraft- – 120
 – konservativ 120
 –, Skalar- – 120
 –, Vektor- – 120
 –, wirbelfreies 122
 Fernkräfte 25
 feste Polbahn 14
 Festlager 55
 Flaschenzug 66
 Fluchtschnelligkeit 124
 Flüssigkeitsreibung 68
 freies Moment 37
 Freiheitsgrad 5, 19
 Freischneiden 25
 Frequenz
 –, Kreis- – 84
 Funktion
 –, Potential- – 120

G

geführter Stab 11, 15
 Gelenk 55
 –, reibungsbehaftet 74
 gemischtes Produkt 117
 Geometrie der Bewegungen 76
 Gesamtleistung 30, 34
 Gesamtpotential 123

Geschwindigkeit 6
 –, Rotations- – 13, 18
 –, Translations- – 18
 –, Winkel- – 8
 Gesetz
 –, Coulombsches 23
 –, Feder- – 122
 –, Gleitreibungs- – 68
 –, Haftreibungs- – 68
 –, Newtonsches 81
 –, Rollreibungs- – 68
 –, Rollwiderstands- – 68
 Gleichgewichtsbedingung 51
 Gleichungen
 –, Bewegungs- – 81, 82
 –, Euler- – 137, 138
 Gleitreibungs
 –-Gesetz 68
 –-Koeffizient 68
 –-Kraft 67, 122
 grafische Statik 59
 Gravitation 23
 Gravitationskonstante 121

H

Haftreibungs
 –-Gesetz 68
 –-Koeffizient 68
 –-Kraft 67
 Halbkreisfläche 45
 Hauptachsensystem 136
 Hauptsatz der Statik 50
 Hebelarm 26
 homogener Körper 44, 134

I

ideales Fachwerk 59
 ideal raue Berührung 69
 Impuls 91
 –-Satz 91
 Inertialsystem 80
 innere Kraft 25
 inneres Produkt 112
 Invariante
 –, der Dynamik 38
 –, der Kinematik 20

K

Kettenregel 7, 8
 Kinematik 18
 –, Invariante 20
 Kinematik 11, 76
 kinematische Relation 87, 88, 103
 kinematisch unbestimmtes System 56
 Kinetik 76

- kinetische Energie 118
 - , relative 128
 - Kippen 64
 - Knickung 63
 - Kniegelenk 48
 - Komponente 112
 - Komponentenbedingung 51
 - Komponentenformel 112
 - konservativ
 - , Feld 122
 - , Kraft 122
 - , Kraftfeld 120
 - , System 122
 - , Energiesatz 123
 - Konstante
 - , Gravitations- – 121
 - , Normierungs- – 120
 - Kontaktkräfte 25
 - Koordinate
 - , Lage- – 5
 - , Polar- – 8
 - , Zylinder- – 8
 - Korkezieherregel 110
 - Körper
 - , Bezugs- – 5
 - , homogener 44, 134
 - , starrer 10
 - , Trägheitsmoment 134
 - Kraft 23
 - , äussere 25
 - , Bindungs- – 33, 53
 - , Dichte 24
 - , eines Leiters 23
 - , eingeprägte 54
 - , Feder- – 122
 - , Feld 120
 - , konservativ 120
 - , innere 25
 - , konservative – 122
 - , Lager- – 53
 - , leistungslose 30
 - , Lorentz- – 30
 - , Normal- – 54, 64
 - , Reibungs- – 54, 67, 122
 - , Schnitt- – 60
 - , Stab- – 59
 - , Stoss- – 93
 - , Trägheits- – 79
 - , Widerstands- – 68
 - , Zapfen- – 74
 - , Zwangs- – 53
 - Kraftarm 26
 - Kräfte
 - , Fern- – 25
 - , -Gruppe 33
 - , parallele 41
 - , zentrale 37
 - , Kontakt- – 25
 - , -Mittelpunkt 44
 - , mit unterschiedlichen Angriffspunkten 25
 - , -Paar 37
 - kräftefreie Bewegung 98
 - Kreisbewegung 78
 - Kreiselung 17
 - Kreisfrequenz 84
 - Kreuzprodukt 114
 - Kugel 134
 - Kugel, rollende 30
- ## L
- Lagekoordinate 5
 - Lager
 - , Auf- – 55
 - , Einspannung 55
 - , -Kraft 53
 - , Längs- – 55
 - , Quer- – 55
 - , -Reibung 74
 - Lagrange 48
 - Längslager 55
 - Leistung 29
 - , Gesamt- – 30, 34
 - , virtuelle 48
 - leistungslose Kraft 30
 - linienflüchtiger Vektor 36
 - Lorentz-Kraft 30
 - Loslager 55
 - Luftreibung 68
- ## M
- Masse
 - , schwere 83
 - , spezifische 79
 - , träge 83
 - masselos 80
 - Massen
 - , -Mittelpunkt 44
 - , -Satz 92
 - , -Punkt 81
 - Massenträgheitsmoment 99, 101, 133
 - materieller Punkt 5
 - mathematisches Pendel 83, 119
 - Matrix, Trägheits- – 133
 - Mechanik 4

Moment

- , bezüglich einer Achse 27
- , bezüglich eines Punktes 26
- , Deviations- – 133
- , Dipol- – 42, 43
- , freies 37
- , Kräftepaar 37
- , Massenträgheits- – 133
- , Reibungs- – 54, 67
- , resultierendes 34
- , Rollreibungs- – 67
- , Rollwiderstands- – 54, 67
- , Trägheits- – 133, 134

Momentan

- Achse 18
- Zentrum 13

momentaner Bewegungszustand 11

Momentenbedingung 51

N

Newton 23, 24, 81, 83

Newtonsches

- Gesetz 81
- Potential 121

Normalkraft 54, 64

Normierungskonstante 120

Nullsystem 36

O

Ortsvektor 5

P

parabolische Schnelligkeit 124

parallele Kräftegruppe 41

Parallelführung 55

Parallelogrammregel 23, 108

PdvL 48, 50, 79

Pendel

- , mathematisches 83, 119
- , physikalisches 95, 97

Pendelstütze 55

Periode 84

physikalisches Pendel 95, 97

Polarkoordinaten 8, 78

Polbahn 14

- , bewegliche 14
- , feste 14

Potential

- , Coulombsches – 121
- , Gesamt- – 123
- , Newtonsches 121

Potentialfunktion 120

Prinzip

- , Äquivalenz- – 83
- , der virtuellen Leistungen 48, 50, 79
- , Reaktions- – 24

Problemlösung 139

Produkt

- , äusseres 114
- , gemischtes 117
- , inneres 112
- , Kreuz- – 114
- , Skalar- – 112
- , Spat- – 117
- , Vektor- – 114
- , doppeltes 117

Projektion 112

Punkt 5

- , Angriffs- – 23
- , Massen- – 81
- , Massenmittel- – 44
- , materieller 5
- , Schwer- – 44

Q

Quader 134

Querlager 55

R

Rad 54

- , auf schiefer Ebene 102
- , rollendes 7, 14, 76

raue Berührung 67

Reaktion 53

- , Reibungs- – 54

Reaktionsprinzip 24

Rechteckplatte 21

Rechte-Hand-Regel 26, 111

Rechtssystem 110

Reduktion 38

Reibung 67

- , Coulombsche 68
- , Flüssigkeits- – 68
- , Lager- – 74
- , Luft- – 68
- , trockene 68

Reibungs

- Koeffizient 68
- Kraft 54, 67
- Moment 54, 67
- Reaktionen 54

reibungsbehaftetes Gelenk 74

Relation, kinematische 87, 88, 103

relative kinetische Energie 128

relativer Drall 96

relativer Drallsatz 97

Relativitätstheorie

- , Allgemeine 83

Resultierende 34

resultierendes Moment 34

rollende Kugel 30

rollendes Rad 7, 14, 76

Rollreibung

- -Gesetz 68
- -Länge 68
- -Moment 67

Rollwiderstands

- -Gesetz 68
- -Länge 68
- -Moment 54, 67

Rotation 11

Rotations

- -Achse 11
- -Geschwindigkeit 13, 18
- -Schnelligkeit 13

Ruhe 48

Ruhelage 48, 84, 85

S

Satz

- , Drall- – 94
- , bez. des Massenmittelpunktes 97, 101
- , für ebene Rotationen 100
- , im bewegten System 137
- , relativer 97
- , Erhaltungs- – 92
- , Impuls- – 91
- , Massenmittelpunkt- – 92
- , Steiner 135

Schiebehülse 55

Schnelligkeit 6

- , Flucht- – 124
- , parabolische 124
- , Rotations- – 13

Schnittkraft 60

Schraube 39

Schraubenachse 39

Schraubung 20

Schwerefeld 120

schwere Masse 83

Schwerpunkt 44

Schwingung 125

Seil 55

Skalar 108

Skalarfeld 120

Skalarprodukt 112

Spatprodukt 117

spezifische Masse 79

Stab

- , geführter 11, 15
- -Kraft 59

Standfläche 64

starre Bewegung 11

starrer Körper 10

Starrkörperformel 18

Statik 4

- , analytische 59
- , grafische 59
- , Hauptsatz 50

statisch

- , äquivalent null 36
- , bestimmtes System 55
- , unbestimmtes System 56

statische Äquivalenz 34

Steifigkeit 85, 122

Steiner, Verschiebungssatz 135

Stoss 92

- , elastischer 93

- -Kraft 93

- , vollkommen inelastischer 93

- -Zeit 93

System 5, 25

- , Bezugs- – 5

- , Hauptachsen- – 136

- , im Gleichgewicht 36

- , Inertial- – 80

- , kinematisch unbestimmtes 56

- , konservatives – 122

- , Null- – 36

- , statisch bestimmt 55

- , statisch unbestimmt 56

- , trennen 60

T

Tensor 136

Theodolit 63

Tisch 62

träge Masse 83

Trägheits

- -Kraft 79

- -Kraftdichte 79

- -Matrix 133

- -Moment 133, 134

Trägheitstensor 99

Translation 11

Translationsenergie 128

Translationsgeschwindigkeit 18

trennen 60

trockene Reibung 68

U

unzulässige Bewegung 54

unzulässiger virtueller Bewegungszustand 47

V

Vektor 107

- , linienflüchtiger 36

- , Orts- – 5

Vektorfeld 120

Vektorfunktion 6

Vektorprodukt 114

- , doppeltes 117

Verschiebungssatz von Steiner 135

virtuelle Leistung 48

virtueller Bewegungszustand 47

vollkommen inelastischer Stoss 93

W

Watt 30

Wechselwirkung 23

Wellenausbreitung 93

Widerstandskraft 68

Winkelgeschwindigkeit 8

wirbelfreies Feld 122

Wirkungslinie 23

Wurf 85, 86

Z

Zapfenkraft 74

Zentralachse 21, 39

zentrale Kräftegruppe 37

zulässige Bewegung 54

zulässiger virtueller Bewegungszustand 47

Zusatzbedingung 51

Zusatzpostulat zum PdvL 50

Zwangskraft 53

Zylinder 134

Zylinderkoordinaten 8, 77